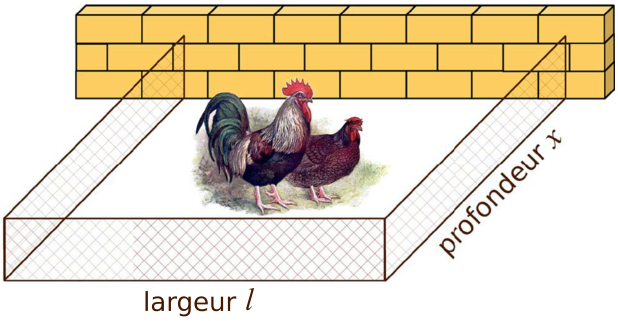
Histoire de poules

Un agriculteur souhaite réaliser un enclos rectangulaire contre un mur pour ses poules. Il dispose de 21 m de grillage et doit tout utiliser.



On cherche à déterminer les dimensions de l'enclos afin que son aire soit maximale. Soit l la largeur de l'enclos et x sa profondeur, en mètres.

a. Quelle est l'aire de l'enclos si $x = 3$ m ?

$l = 21 - 2 \times 3 = 21 - 6 = 15$

$15 \times 3 = 45$ donc l'aire vaut 45 m^2.

b. Quelles sont les valeurs possibles de x ?

x est positif et au maximum égal à 10,5.

c. On note $\mathscr{A}$ la fonction qui, à x, associe l'aire de l'enclos correspondant. Détermine $\mathscr{A}$.

$A = l \times x = (21 - 2x) \times x = 21x - 2x^2$

d. Avec l'aide de ta calculatrice ou d'un tableur, complète le tableau de valeurs de la fonction $\mathscr{A}$.

x	0	1	2	3	4	5
$\mathscr{A}(x)$	0	19	34	45	52	55

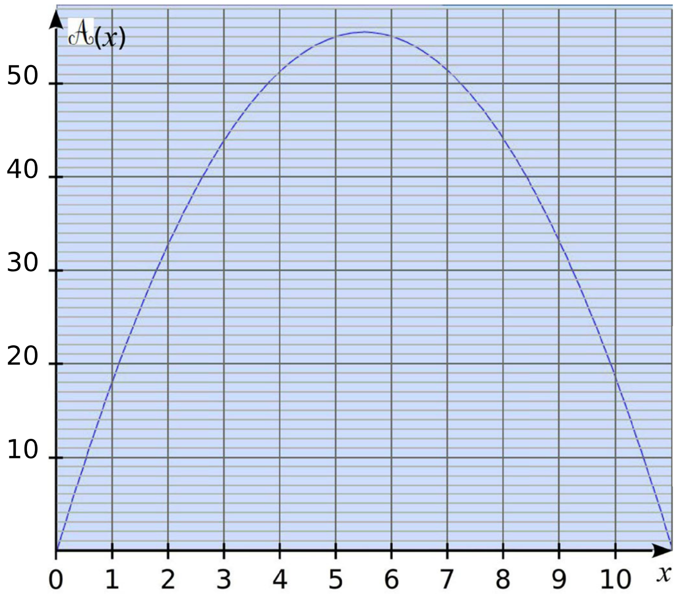
x	6	7	8	9	10	10,5
$\mathscr{A}(x)$	54	49	40	27	10	0

e. À l'aide du tableau, décris l'évolution de $\mathscr{A}(x)$ en fonction de x et donne un encadrement du nombre x pour lequel $\mathscr{A}(x)$ semble maximal.

$A(x)$ augmente puis diminue.

$A(x)$ semble maximal quand x est compris entre 4 et 6.

f. Construis la courbe représentative de $\mathscr{A}$.



g. Complète ce nouveau tableau de valeurs, puis donne un encadrement au dixième du nombre x pour lequel $\mathscr{A}(x)$ semble maximal.

x	4,8	4,9	5	5,1	5,2	5,3	5,4
$\mathscr{A}(x)$	54,72	54,88	55	55,08	55,12	55,12	55,08

L'aire semble maximale pour x compris entre 5,2 et 5,3.

h. Calcule : $\mathscr{A}(5{,}25) - \mathscr{A}(x)$. Puis montre que cette expression est égale à $2(x - 5{,}25)^2$.

$A(5{,}25) - A(x) = 55{,}125 - (21x - 2x^2)$

$= 2x^2 - 21x + 55{,}125$

$= 2(x^2 - 10{,}5x + 27{,}5625)$

$= 2(x - 5{,}25)^2$

i. Détermine le signe de cette expression et déduis-en la valeur du nombre x pour lequel $\mathscr{A}(x)$ est maximal.

Cette expression est toujours positive

donc $A(5{,}25)$ est toujours supérieur à $A(x)$ pour tout x.

$A(x)$ est donc maximal pour $x = 5{,}25$.

j. Déduis-en les dimensions de l'enclos d'aire maximale.

$x = 5{,}25$

$l = 21 - 2 \times 5{,}25 = 21 - 10{,}5 = 10{,}5$