Collection iParcours

Maths

Manuel

Cycle 4

3e

Sébastien Dumoulard
Professeur certifié de mathématiques

Katia Hache
Professeure certifiée de mathématiques

Sébastien Hache
Professeur certifié de mathématiques

Jean-Philippe Vanroyen
Professeur agrégé de mathématiques

Génération 5

Sommaire

nombres et calculs

grandeurs et mesures espace et géométrie

Dans ce manuel, les chapitres
sont constitués de plusieurs rubriques.

Activités

Des activités de découverte et d'investigation, souvent issues de la vie quotidienne, permettent à l'élève d'appréhender les principales notions étudiées dans le chapitre.

Cours

Dans cette partie, les définitions et propriétés à connaitre sont expliquées par des exemples clairs. Pour chaque notion, des exercices corrigés en fin de manuel permettent à l'élève de vérifier son savoir-faire : **n°...**.

Exercices

Le nombre et la variété des exercices permettent à l'élève de travailler à son rythme, en vue d'acquérir les connaissances et compétences attendues en fin de cycle. Ils sont triés par notion et par difficulté :

- Exercices oraux
- Exercices d'entrainement
- Exercices d'approfondissement
- Exercices de synthèse

Les outils numériques (tableur, instruments de géométrie dynamique, logiciel Scratch) sont utilisés dans chaque chapitre.

Lexique Formulaire

Dans le lexique, l'élève retrouve la définition du vocabulaire mathématique étudié. Le formulaire, lui, rassemble les formules mathématiques à connaitre.

Génération 5 Version papier : Armelle Ronco, Valérie Gazzola, Catherine Groleau, David Mignot.
Version numérique : Bernard Domenge, Sébastien Rey, Pascal Scheerlinck, Thierry Billardon.

Graphismes et illustrations Dominique Sénon, Fabrice Rousselot.

organisation et gestion de données, fonctions

algorithmique et programmation

Auteurs et relecteurs

Sébastien Dumoulard, Katia Hache, Sébastien Hache, Jean-Philippe Vanroyen.

Association Sésamath pour les contenus issus des manuels Sésamath (Éditeur : Génération 5) : *Madeleine Abrahami, Jean-Hervé Amblard, Rémi Angot, Thierry Ansel, Loïc Arsicaud, Audrey Aulard, Michèle Badri, Sandrine Baglieri, Denis Bodet, Gilles Bougon, Rémi Boulle, Sylvain Bourdalé, Fabien Bourg, Xavier Birnie-Scott, Françoise Cabuzel, Maxime Cambon, Dominique Cambresy, Vinciane Cambresy, Alexandre Carret, Laurent Charlemagne, Audrey Chauvet, Emmanuel Chauvet, Françoise Chaumat, Gwenaëlle Clément, Benjamin Clerc, Sébastien Cogez, Claire Coffy Saint Jalm, Denis Colin, Sophie Conquet-Joannis, Robert Corne,Marie-France Couchy, Emmanuel Coup, Thomas Crespin, Olivier Cros Mouret, Sébastien Daniel, Stéphane Dassonville, Marie-Claude David, Noël Debarle, Daniel Dehaes, Muriel De Seze-Petersen, Rémi Deniaud, Rémy Devoddère, Audrey Dominique, Claire de Dreuille, Anne-Marie Drouhin, Francine Dubreucq, Ludyvine Dumaisnil, Corinne Dupuich, Éric Elter, Anne-Marie Fleury, Élisabeth Fritsch, Jean-Marc Gachassin, Yolande Garouste, Hervé Galliot, Christelle Gauvrit, Franck Gaye, Nathalie Gendre, Martine Genestet, Stéphane, Geyssely, Gérard Goillot, Hélène Gringoz, Odile Guillon, Jalil Haraki, Karine Helies, Laurent Hennequart Hubert Herbiet, Géraldine Hilaire, Pierre-yves Icard, Nathalie Irbah, Olivier Jaccomard, Julien Jacquet, Sébastien Jolivet, Virginie Jourand, Jean-Louis Kahn, Stéphane Kervella, Bruno Lambert, Angelo Laplace, Alexandre Lecomte, Yann Le Flem, Marion Le Grognec, Isabelle Lemaître, Nicolas Lemoine, Loubia Leroux, Sandrine Le Saint Martine Lescure, Anne Levacher, Rafael Lobato, François Loric, José Marion, Marc Masson, Aline Meunier, Benoît Montessinos, Nicolas Moreau, Julien Noël-Coulibaly, Emmanuel Ostenne, Xavier Ouvrard Brunet, Christophe Paumelle, Christian Payros, Séverine Peinado, Juliette Pelecq, Sylvie Perrigault, Sophie Pesnel Muller, Sylvain Petit, Mireille Poncelet, Olivier Pontini, Virginie Poirier, Yann Pradeau, Yann Pozzar, Nicolas Prudhomme, Nelly Reclus, Stéphane Renouf, Christophe Rindel, Sabrina Roberjot, Christophe Roland, Arnaud Rommens, Pascal Sabate, Abdel Saraf, Claudine Schwartz, Boris Sissoeff, Michel Souchet, Jean-Paul Sousa, Patricia Stin, Michel Suquet, Anne Svirmickas, Aurélie Tarot, Wilfrid Tétard, Marielle Trot-Massé, Nicolas Van Lancker, Corinne Vilchair, Gérard Vinot, Isabelle Vivien, Laurent Zamo.*

Manuel numérique

La totalité du manuel sur Internet !

www.iparcours.fr

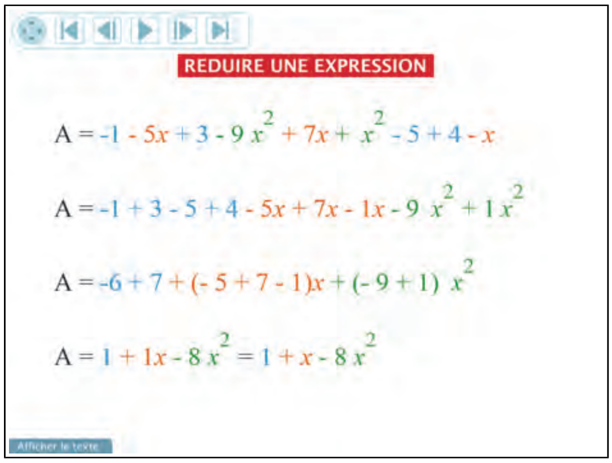
www.iparcours.fr

Allège ton cartable et retrouve en ligne tout ce dont tu as besoin : cours, exercices et problèmes, lexique et formulaire, etc.

Tu pourras aussi accéder à de **nombreux compléments numériques** pour travailler à ton rythme.

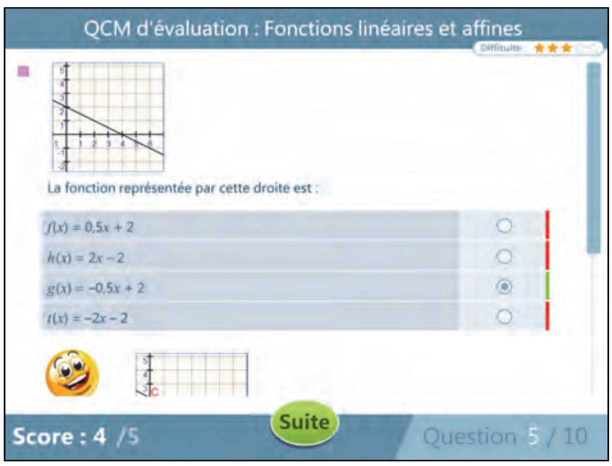
Aides animées sonorisées

Les principales notions sont reprises étape par étape.



Exercices interactifs

- Des **QCM** pour t'entrainer et t'auto-évaluer
- Des activités sur **tableur**
- Des activités en **géométrie dynamique**
- Une initiation à la **programmation**



Lexique et formulaire

- Tu vérifies le sens d'un terme mathématique.
- Tu t'assures de la justesse d'une formule mathématique.

Questions FLASH

Des questions orales pour vérifier que tu as bien compris les points essentiels du cours.

LE MANUEL NUMÉRIQUE du PROFESSEUR

L'intégralité des corrigés

(inscription : www.iparcours.fr)

- corrigés : animés ou fixes
- vidéos pour corriger les exercices TICE

La projection en classe

- affichage simultané de plusieurs compléments
- excellente lisibilité (mode vectoriel)

Le mode Édition

- outils pour expliquer, commenter
- pages personnelles pour préparer les séances

N0

Calculs

Cours

1 Nombres relatifs

Propriété 1

- La **somme de deux nombres relatifs de même signe** est un nombre relatif qui a pour signe le signe commun aux deux nombres, et pour distance à zéro la somme des distances à zéro.
- La **somme de deux nombres relatifs de signes contraires** est un nombre relatif qui a pour signe le signe du nombre qui a la plus grande distance à zéro, et pour distance à zéro la différence des distances à zéro.

Propriété 2 Le produit de deux nombres relatifs est un nombre relatif qui a pour distance à zéro le produit des distances à zéro des deux nombres, et :

- un signe positif si les deux nombres relatifs sont de **même signe** ;
- un signe négatif si les deux nombres relatifs sont de **signes contraires**.

Propriété 3 Le quotient de deux nombres relatifs est un nombre relatif qui a pour distance à zéro le quotient des distances à zéro des deux nombres, et :

- un signe positif si les deux nombres relatifs sont de **même signe** ;
- un signe négatif si les deux nombres relatifs sont de **signes contraires**.

2 Fractions

Propriété 1 Deux nombres en écriture fractionnaire **de même dénominateur** positif sont rangés dans le même ordre que leurs numérateurs.

Propriété 2 Pour additionner (ou soustraire) deux nombres en écriture fractionnaire de même dénominateur, il suffit d'additionner (ou de soustraire) les numérateurs, et on garde le dénominateur commun.

Pour tous nombres a, b et c, où c est non nul : $\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}$ et $\frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}$

Propriété 3 Pour **multiplier des nombres en écriture fractionnaire**, on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.

Pour tous nombres a, b, c et d, où b et d sont non nuls : $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a\times c}{b\times d}$

Propriété 4

Diviser par un nombre non nul revient à **multiplier par son inverse**.

Pour tous nombres a, b, c et d, où b, c et d sont non nuls :

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c} \text{ ou } \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}$$

3 Puissances

Définition 1

Pour tout nombre entier positif non nul n et tout nombre relatif a :

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ facteurs}} \quad \text{et par convention : } a^0 = 1$$

Pour tout nombre entier positif non nul n et tout nombre relatif a :

$$a^{-n} = \frac{1}{\underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ facteurs}}} = \frac{1}{a^n}$$

Propriété Pour tous nombres entiers relatifs m et p :

$$10^m \times 10^p = 10^{m+p} \qquad \text{et} \qquad \frac{10^m}{10^p} = 10^{m-p}$$

Définition 2 Tout nombre décimal non nul peut être écrit en **notation scientifique**, c'est-à-dire sous la forme $\boldsymbol{a} \times \mathbf{10^n}$, où a est un nombre décimal ayant un seul chiffre non nul avant la virgule, et où n est un nombre entier relatif. a est appelé **mantisse** du nombre.

4 Calcul littéral

Propriété 1 Pour tous nombres relatifs k, a et b :

$$k \times (a + b) = k \times a + k \times b$$

$$k \times (a - b) = k \times a - k \times b$$

Propriété 2 Pour tous nombres relatifs k, a et b :

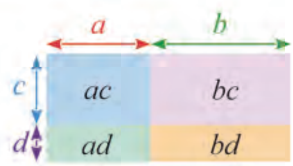
$$k \times a + k \times b = k \times (a + b)$$

$$k \times a - k \times b = k \times (a - b)$$

Propriété 3 **L'opposé d'une somme algébrique** est égal à la somme des opposés de chacun de ses termes.

Propriété 4 Pour tous nombres relatifs a, b, c et d :

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$



Exercices

À l'oral !

Voir aussi les Questions FLASH dans le manuel numérique !

1 Calcule.

$A = 5 + 3 \times 9$

$B = 36 - 10 \div 2$

$C = 50 - 15 + 25 - 5$

$D = 15 \div 5 \times 3$

2 Calcule.

$A = (11 - 3) \times (9 + 2)$

$B = 6 \times 8 \div 0{,}5$

$C = 28 \div [(11 - 9) \times 2]$

$D = 5 \times 5 \times 5$

3 Donne un ordre de grandeur du résultat de chaque calcul.

$A = 489{,}4 \times 37 \times 2{,}024$

$B = 39{,}9 - 15{,}01 \div 4{,}95$

$C = 70{,}4 - 0{,}099 \times 303{,}05$

4 ***Le compte est bon***

54	1	3	4	6

285	7	25	10	4

5 Compare.

a. $-3{,}5 \dots 2$ **b.** $4 \dots -2{,}9$ **c.** $-3 \dots -6$

d. $-23 \dots -21$ **e.** $0{,}2 \dots -0{,}2$ **f.** $-1 \dots -0{,}1$

6 Quel est l'écart...

a. ...entre les températures 2,5°C et – 3,5°C ?

b. ...entre les dates – 1 450 et – 1 300 ?

c. ...entre un point d'altitude 250 m et un autre de profondeur – 350 m ?

7 Compare.

a. $\frac{4}{7} \dots \frac{9}{7}$ **b.** $\frac{4}{5} \dots \frac{4}{7}$ **c.** $\frac{5}{2{,}9} \dots \frac{2{,}9}{5}$

d. $\frac{12}{84} \dots \frac{1}{7}$ **e.** $\frac{4}{13} \dots \frac{7}{26}$ **f.** $\frac{25}{8} \dots 3$

8 **QCM**

Trouve la réponse correcte mentalement !

a. $7\,256 \times 57 =$

R.1	R.2	R.3
19 252	413 592	408 707

b. $2\,598 \div 2\,000 =$

R.1	R.2	R.3
1,299	0,77	2,099

c. $4\,508 \div 8{,}92$ vaut environ...

R.1	R.2	R.3
50	500	2 000

9 Calcule et simplifie si nécessaire.

a. $\frac{13}{9} + \frac{5}{9}$ **c.** $2 + \frac{2}{3}$

b. $\frac{1}{4} - \frac{1}{20}$ **d.** $\frac{31}{7} - 3$

10 Combien valent...

a. $\frac{2}{3}$ de 24 € ? **c.** $\frac{3}{10}$ de 400 cL ?

b. $\frac{3}{4}$ de 60 minutes ? **d.** $\frac{16}{9}$ de 81 cm ?

11 ***Calculs de durées***

a. Quelle durée s'écoule-t-il entre 16 h 55 min et 18 h 20 min ?

b. Si je m'endors à 13 h 40 durant 50 minutes, à quelle heure vais-je sortir de ma sieste ?

12 **Vrai ou Faux**

P.1. La fraction $\frac{145}{405}$ peut être simplifiée par 3 et par 5.

P.2. Multiplier un nombre par une fraction revient parfois à augmenter ce nombre.

P.3. Prendre les $\frac{3}{4}$ des $\frac{2}{3}$ d'une quantité revient à prendre la moitié de cette quantité.

Voir aussi les Questions FLASH dans le manuel numérique !

À l'oral !

13 Complète le tableau suivant.

Écriture décimale	Fraction simplifiée	Pourcentage
0,37		
	$\frac{1}{10}$	
0,25		
		20 %

14 Calcule.

A = 9 – 14   C = – 11 + 5

B = – 15 – 3   D = – 23 – 23

15 Calcule.

E = 3 × (– 4)   G = (– 8) × (– 7)

F = (– 30) × 9   H = (+ 10) × (– 50)

16 Calcule.

I = (– 100) × (– 0,64)   K = (– 23,4) × 0,1

J = (– 2) × (– 13,6)   L = (– 1,5) × (+ 400)

17 Calcule en respectant les priorités.

M = 9 – 5 × 4   P = –20 – 15 × 10

N = – 12 ÷ 3 × 6   Q = 7 + 7 ÷ 7 × 7

18 Sachant que 34 × 47 = 1 598, calcule.

A = (– 34)× (– 47)   B = (– 0,34) × 470

19 Calcule et simplifie si nécessaire.

a. $\frac{12}{5} + \frac{3}{5}$ **b.** $\frac{10}{7} - \frac{25}{14}$ **c.** $2 - \frac{2}{3}$

d. $\frac{5}{7} \times \frac{3}{4}$ **e.** $\frac{15}{8} \times \frac{6}{25}$ **f.** $\frac{15}{6} \times 2$

20 Calcule.

a. 10 % de 560 €   **c.** 20 % de 30 mL

b. 50 % de 250 g   **d.** 200 % de 150 cm^3

21 QCM

a. Si $A = 3 + \frac{3}{2}$, $B = 5 - \frac{3}{4}$ et C = 4,2, alors...

R.1	R.2	R.3
A < B < C	C < B < A	C < A < B

b. 5 % de 180, c'est...

R.1	R.2	R.3
9	18	36

c. 27,4 millions, c'est...

R.1	R.2	R.3
27,4 × 10^7	2,74 × 10^7	27,4000000

22 Calcule l'expression $8x^2 - 3x + 5$ pour :

a. $x = 0$ **b.** $x = -1$ **c.** $x = -3$

23 Calcule mentalement.

a. 22 × 101 = 22 × (100 + 1)

b. 6 × 27   **c.** 7 × 210

24 Calcule mentalement.

a. 3,3 × 6 + 3,3 × 4   **b.** 0,7 × 106 – 0,7 × 6

25 Donne l'écriture décimale.

A = 6 × 10^3 C = 5 × 10^{-2}

B = 1,5 × 10^6 D = 56 × 10^{-4}

26 Vrai ou Faux

P.1. 23 % de 55 = 55 % de 23.

P.2. L'écriture scientifique de 45 829 est 45,829 × 10^3.

P.3. 1 TéraOctet, c'est 1 000 MégaOctets.

Nombres relatifs

27 **QCM**

a. – 3 est inférieur à…

R.1	R.2	R.3
– 4	2	– 10

b. 5 + … = – 11. Le nombre manquant est…

R.1	R.2	R.3
– 6	6	– 16

c. – 10 est le résultat de…

R.1	R.2	R.3
(– 5) × (– 2)	– 11 + 1	(– 7) – (– 3)

d. – 10 – 2+ 1 =

R.1	R.2	R.3
– 11	11	– 7

28 Compare les nombres relatifs suivants.

a. + 5 et + 6
b. – 6 et – 2
c. – 2,1 et – 2
d. 0,5 et – 0,49
e. + 3 et – 7
f. + 4 et – 14
g. – 1,3 et – 1,03
h. – 3,7 et + 3,8

29 Effectue les calculs suivants.

a. 17 – 9
b. – 19 – 24
c. – 13 + 12
d. 11 – 32
e. 10 – 75
f. – 8 – 8

30 Effectue les calculs suivants.

a. – 2,1 – 4,1
b. – 1,7 + 0,7
c. 0,2 – 1,9
d. – 1,25 – 1,75
e. – 6 + 6,6
f. 3,8 – 3,8

31 Effectue les calculs suivants.

A = 11 – 7 + 21
B = – 33 – 18 + 15
C = – 17 – 17 + 17
D = 19 – 10 + 4 – 10
E = – 39 + 44 – 31
F = 20 – 60 + 50 – 80

32 Calcule les expressions suivantes.

G = (– 3 + 5) – (4 – 10) – (– 7 – 8)
H = – 10 + 2 – (1 – 5) – (3 + 15)
I = – 20 – [40 – (30 – 120)]

33 ***Qui dit vrai ?***

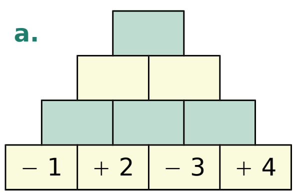
34 ***Calcul mental***

a. (– 5) × (+ 3)
b. (– 7) × (+ 4)
c. (– 40) × (– 2)
d. (+ 17) × (+ 10)
e. (+ 313) × (+ 0,1)
f. (– 1,5) × (+ 100)
g. (– 0,25) × (– 40)
h. (+ 8) × (– 0,3)

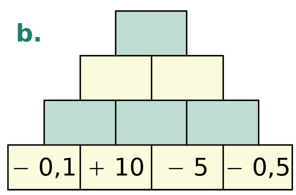
35 ***Pyramides***

Recopie puis complète les pyramides suivantes, afin que le nombre contenu dans une case soit le produit des nombres contenus dans les deux cases situées en dessous de lui.

a.



b.



36 Calcule astucieusement.

A = (– 2) × (– 1,25) × (– 50) × (– 8)
B = (– 75) × (– 0,25) × (+ 2) × (+ 4)

37 Effectue les calculs suivants.

A = (– 1) × (– 30) × (+ 5)
B = (– 6) × (– 2) × (– 4) × (– 1) × (– 1)
C = (+ 6) × (– 1) × (+ 3) × (+ 6) × (– 1) × (+ 3)

38 **QCM**

a. $(-5) \times (-4) =$

R.1	R.2	R.3
9	-20	20

b. Le résultat de $(-7) \times 14 \times 7 \times (-14)$ est...

R.1	R.2	R.3
positif	nul	négatif

c. L'inverse de -2 est...

R.1	R.2	R.3
0,5	$-\frac{1}{2}$	2

d. $\frac{-5}{20} =$

R.1	R.2	R.3
-25	100	$-0{,}25$

e. Quel est le plus petit résultat ?

R.1	R.2	R.3
$7 \times (-7)$	$7 \div (-7)$	$7 - (-7)$

39 ***Calcul mental***

a. $24 \div (-8)$
b. $21 \div (-3)$
c. $-33 \div (-11)$
d. $27 \div (+9)$
e. $-19 \div (-1)$
f. $-35 \div 2$
g. $(-54) \div (-9)$
h. $25 \div (-0{,}5)$

40 Sans les calculer, donne le signe de chacun des calculs suivants.

a. $(-0{,}7) \times (-11{,}1)$
b. $(+25) + (-22)$
c. $(-0{,}9) - (-1)$
d. $(-37) \times (+510)$
e. $(+0{,}7) \times (+8)$
f. $(-0{,}19) + (+0{,}2)$

41 ***Calcul mental***

a. $3 \times (-3)$
b. $-11 + (-10)$
c. -11×3
d. $-5 - (+15)$
e. $-36 \div 3$
f. $(-34) + (-2)$
g. $-10 \times (-5)$
h. $-45 \div (-5)$

42 Pour chaque égalité suivante, remplace le symbole ◊ par le signe opératoire qui convient.

a. (-4) ◊ $(-2) = -2$
b. (-4) ◊ $(-2) = +2$
c. (-4) ◊ $(-2) = +8$
d. (-4) ◊ $(-2) = -6$

43 Effectue les calculs suivants.

$A = \frac{-36}{-6} - 6$

$C = \frac{1 \times 7}{-2 + 5}$

$B = 3 + \frac{2}{-10}$

$D = \frac{1 - 7}{12 + 1}$

44 **Vrai ou Faux**

P.1. $4 \times (-5) = (-1)$

P.2. Le produit de $(-3{,}1)$ par 2 est égal au produit de (-2) par 3,1.

P.3. L'opposé de -10 est 0,1.

P.4. $4 - 4 \times 2 = 0$

P.5. Le produit de 99 nombres négatifs est négatif.

45 Effectue les calculs suivants en soulignant, à chaque étape, le calcul en cours.

$A = 7 + (-1) \times (-6)$

$B = 19 - (+2) \times (-4) - 1$

$C = -30 \div (-19 + 25)$

$D = -1 - 9 \times (-4)$

$E = -3 \times 3 \times (-2 + 4)$

46 ***Le compte est bon***

a.	**6**	-2	-1	-1	-4
b.	**-50**	-10	-5	-5	-10
c.	**76**	-4	100	25	-4
d.	**107**	-12	-2	7	-10

47 ***Vocabulaire***

a. Traduis les phrases suivantes par un calcul.

- La somme du produit de 1 par -1 et de -2.
- Le produit de la somme de 5 et de -3 par la somme de 7 et de -4.
- Le quotient de la somme de -17 et de -4 par le produit de 7 et de -1.

b. Effectue ces calculs.

Fractions

48 **QCM**

a. Une écriture simplifiée de $\frac{125}{625}$ est...

R.1	R.2	R.3
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	125,625

b. $\frac{3}{16}$ est le résultat de...

R.1	R.2	R.3
$\frac{2}{8}+\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}+\frac{2}{8}$	$\frac{1}{16}+\frac{1}{8}$

c. $\frac{15}{13}-1=$

R.1	R.2	R.3
$\frac{15}{12}$	$\frac{2}{13}$	$\frac{14}{13}$

d. Dans une classe de 30 élèves, les $\frac{2}{3}$ viennent en bus. Combien d'élèves ne viennent pas en bus ?

R.1	R.2	R.3
$\frac{2}{3}\times 30$	$1-\frac{2}{3}\times 30$	$(1-\frac{2}{3})\times 30$

e. $\frac{12}{25}\times\frac{7}{10}=$

R.1	R.2	R.3
$\frac{19}{55}$	$\frac{41}{125}$	$\frac{84}{250}$

49 Simplifie chaque fraction au maximum.

a. $\frac{45}{35}$ **b.** $\frac{150}{60}$ **c.** $\frac{99}{77}$ **d.** $\frac{57}{76}$

50 Compare les nombres suivants.

a. $\frac{-5}{13}$ et $\frac{3}{13}$

b. $\frac{-7}{3}$ et $\frac{-8}{5}$

c. $-\frac{23}{11}$ et $\frac{45}{-22}$

d. $\frac{1,5}{7}$ et $\frac{0,5}{4}$

51 Effectue les opérations suivantes.

a. $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}$

b. $\frac{5}{6}-\frac{7}{12}$

c. $\frac{1}{14}+\frac{5}{7}$

d. $-\frac{5}{4}-\frac{5}{24}$

e. $\frac{6}{7}+\frac{2}{35}$

f. $\frac{-2}{81}+\frac{-2}{9}$

52 Effectue les opérations suivantes.

a. $4+\frac{3}{5}$

b. $2-\frac{1}{7}$

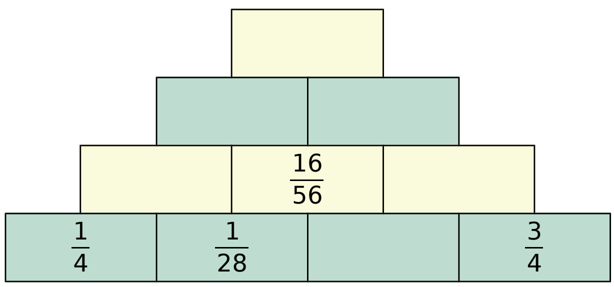
c. $3+\frac{1}{9}$

d. $-\frac{16}{5}-3$

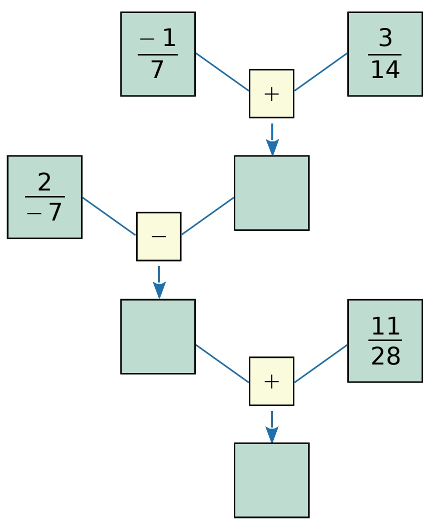
e. $6+\frac{2}{3}$

f. $1+\frac{-3}{7}$

53 Recopie puis complète la pyramide suivante, sachant que le nombre contenu dans une case est la somme des nombres contenus dans les deux cases situées en dessous de lui.



54 Recopie et complète le diagramme suivant.



55 **QCM**

a. $\dfrac{-2}{11} \times \dfrac{11}{-5} =$

R.1	R.2	R.3
$-\dfrac{5}{2}$	$\dfrac{2}{5}$	$-\dfrac{2}{5}$

b. $\left(\dfrac{2}{7} + \dfrac{3}{7}\right) \div \dfrac{1}{5} =$

R.1	R.2	R.3
$\dfrac{1}{7}$	$\dfrac{25}{7}$	$\dfrac{17}{7}$

c. $\dfrac{5}{3} - \dfrac{2}{3} \div \dfrac{5}{3} + \dfrac{2}{3} =$

R.1	R.2	R.3
$\dfrac{3}{3} \div \dfrac{7}{3}$	$\dfrac{5}{3} - \dfrac{2}{5} + \dfrac{2}{3}$	$\dfrac{3}{3} \times \dfrac{3}{5} + \dfrac{2}{3}$

d. $\dfrac{2+3}{4 \times 7}$ s'écrit aussi...

R.1	R.2	R.3
$(2 + 3) \div (4 \times 7)$	$(2 + 3) \div 7(4 \times 7)$	$2 + 3 \div 4 \times 7$

56 Calcule et donne le résultat sous la forme d'une fraction simplifiée.

$A = \dfrac{7}{11} \times \dfrac{3}{4}$

$B = \dfrac{19}{3} \times \dfrac{-4}{19}$

$C = \dfrac{3}{7} \times \dfrac{3}{7}$

$D = \dfrac{-9}{26} \times \dfrac{65}{-72}$

$E = \dfrac{3}{8} \times 56$

$F = 10 \times \dfrac{11}{50}$

57 Même énoncé qu'à l'exercice précédent.

a. $\dfrac{2}{13} \times \dfrac{13}{7} \times \dfrac{5}{11}$

b. $\dfrac{3}{5} \times \dfrac{13}{7} \times \dfrac{15}{39}$

c. $\dfrac{-3}{2} \times \dfrac{2}{5} \times \dfrac{-3}{-11}$

d. $\dfrac{-6}{5} \times \dfrac{-1}{14} \times \dfrac{7}{-3}$

58 **Vrai ou Faux**

P.1. $\dfrac{1}{8}$ est un nombre décimal.

P.2. $2 + \dfrac{4}{3} = \dfrac{6}{3}$.

P.3. Le double de $\dfrac{9}{4}$ est égal à $\dfrac{9}{2}$.

P.4. $-4 \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{-8}{12}$

P.5. $\dfrac{-1}{7}$ est l'inverse de -7.

P.6. $\dfrac{2}{11} \div \dfrac{9}{7} = \dfrac{11}{2} \times \dfrac{9}{7}$

59 Calcule chaque quotient et donne le résultat sous la forme d'une fraction simplifiée.

a. $\dfrac{4}{3} \div 5$

b. $\dfrac{5}{6} \div \dfrac{7}{13}$

c. $7 \div \dfrac{1}{-7}$

d. $\dfrac{-1}{10} \div \dfrac{7}{-20}$

60 Même énoncé qu'à l'exercice précédent.

$A = \dfrac{8}{\dfrac{3}{5}}$ $\quad B = \dfrac{\dfrac{-2}{7}}{5}$ $\quad C = \dfrac{\dfrac{-2}{3}}{\dfrac{-7}{-9}}$

61 Effectue les calculs suivants en respectant les priorités opératoires.

$A = 7 \times \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3}$

$B = \dfrac{7}{4} - \dfrac{3}{4} \times \dfrac{3}{5}$

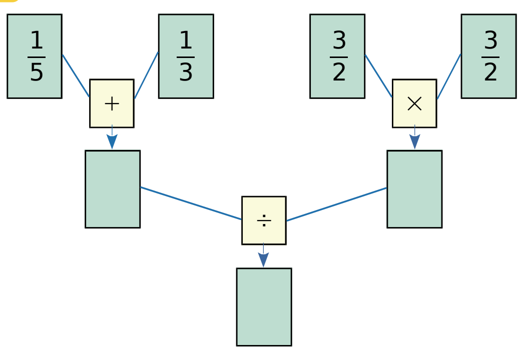
$C = \dfrac{13}{11} + \left(-\dfrac{8}{11}\right) \div \left(-\dfrac{4}{3}\right)$

$D = \dfrac{7}{3} + \dfrac{3}{2} \times \dfrac{-10}{21}$

$E = \dfrac{7+3}{1+2} \times \dfrac{3 \times 6}{5 \times 3}$

$F = \dfrac{6}{5} - \left(-\dfrac{1}{9}\right) \times \left(-\dfrac{3}{4}\right)$

62 Complète.



Puissances

63 **QCM**

a. Le produit de 18 facteurs égaux à – 8 s'écrit...

R.1	R.2	R.3
-8^{18}	$(-8)^{18}$	$18 \times (-8)$

b. L'écriture scientifique de 65 100 000 est...

R.1	R.2	R.3
$6{,}51 \times 10^{7}$	651×10^{5}	$6{,}51 \times 10^{-7}$

c. L'écriture scientifique de 0,00723 est...

R.1	R.2	R.3
723×10^{-5}	$7{,}23 \times 10^{-3}$	$7{,}23 \times 10^{3}$

d. $\dfrac{1}{5^4} =$

R.1	R.2	R.3
-5^{4}	$(-5)^{4}$	5^{-4}

64 Donne l'écriture décimale de chaque nombre.

$M = (-2)^2$ $\quad P = -3^4$ $\quad R = (-1)^7$

$N = -2^5$ $\quad Q = (-3)^4$ $\quad S = (-1)^{2\,016}$

65 Sans les calculer, détermine parmi les nombres suivants ceux qui sont négatifs.

-7^6 $\quad (-2{,}1)^8$ $\quad (-10)^7$ $\quad (-4)^{40}$ $\quad -5^{68}$

66 Calcule en détaillant les étapes.

$A = 3^3 + 5^2 \times 2^3$

$B = (4^3 - 3^2) \times 1^3$

$C = -2^3 + 4^2 \times (-2)^3$

$D = 5 \times 3^4$

$E = (5 \times 3)^4$

$F = 1^2 \times 3^3 \times 4^5$

67 Écris chaque nombre sous forme fractionnaire, comme dans l'exemple.

Exemple : $7^{-2} = \dfrac{1}{7^2} = \dfrac{1}{49}$

a. 7^{-5} $\quad$ **c.** 14^{-3} $\quad$ **e.** $0{,}5^{-3}$

b. 8^{-2} $\quad$ **d.** 10^{-2} $\quad$ **f.** 20^{-4}

68 Écris à l'aide d'une puissance de 10.

a. 100 000 ; 10 000 000 ; 1 000 000 ; 100.

b. dix ; cent millions ; un milliard ; mille.

69 Recopie et complète le tableau.

	Écriture décimale	10^n	En toutes lettres
a.	1 000		
b.		10^5	
c.			Cent millions
d.	10		
e.		10^{12}	
f.			Un

70 Effectue les calculs suivants.

$A = 10^1 + 10^2$

$B = 10^4 - 10^2$

$C = 10^3 \times 10^4$

$D = 10^5 \div 10^2$

$E = 10^3 + 10^5$

$F = 10^3 - 10^5$

$G = 10^3 \times 10^4$

$H = 10^3 \div 10^6$

71 Recopie et complète, sachant que chaque nombre vaut 51,76.

$5{,}176 \times 10^{\cdots}$ $\quad 0{,}5176 \times 10^{\cdots}$ $\quad 517\,600 \times 10^{\cdots}$

$517{,}6 \times 10^{\cdots}$ $\quad 51{,}76 \times 10^{\cdots}$ $\quad 5\,176 \times 10^{\cdots}$

72 Relie chaque nombre à son ordre de grandeur.

0,000 953	•	•	10^{-1}
0,000 104	•	•	10^{-2}
0,108	•	•	10^{-3}
0,009 02	•	•	10^{-4}

73 **QCM**

a. $10^3 \times 10^{-6} =$

R.1	R.2	R.3
10^{-18}	10^{-3}	10^9

b. $\dfrac{10^2}{10^{-5}} =$

R.1	R.2	R.3
10^{-7}	10^{-3}	10^7

c. $\dfrac{15 - 9 \times 10^{-3}}{5 \times 10^2} =$

R.1	R.2	R.3
14,82	$29{,}982 \times 10^{-3}$	$1{,}2 \times 10^{-5}$

d. L'écriture scientifique de $10^2 \times 21 \times 10^{-7}$ est...

R.1	R.2	R.3
21×10^{-3}	$2{,}1 \times 10^9$	$2{,}1 \times 10^{-4}$

e. Quelle est la notation scientifique de $(4 \times 10^{-3})^2$?

R.1	R.2	R.3
$1{,}6 \times 10^{-5}$	8×10^{-3}	6×10^{-1}

74 Parmi les nombres suivants, lesquels sont écrits en notation scientifique ?

a. $7{,}23 \times 10^{12}$
b. $92{,}43 \times 10^{-8}$
c. $1{,}45 \times 100^{-9}$
d. $-1{,}89 \times 10^6$
e. $0{,}777 \times 10^3$
f. $-9{,}6$

75 Associe à chaque nombre de gauche son écriture scientifique.

45,68	•	•	$4{,}568 \times 10^{-1}$
456,8	•	•	$4{,}568 \times 10^1$
0,456 8	•	•	$4{,}568 \times 10^{-3}$
0,004 568	•	•	$4{,}568 \times 10^2$

76 Donne l'écriture scientifique des nombres.

a. 7 283
b. 25 000
c. 654,98
d. 12,47
e. 0,0058
f. 0,000149

77 Écris ces nombres en notation scientifique, puis range-les dans l'ordre croissant.

13 589 ; $130{,}28 \times 10^3$; $0{,}035\,6 \times 10^6$; $0{,}094 \times 10^5$; 201 000 ; $720\,000 \times 10^{-2}$

78 Vérifie que le carré ci-dessous est un carré magique multiplicatif : quand on multiplie les nombres de chaque colonne, de chaque ligne et de chaque diagonale, on obtient le même résultat.

10^{16}	10^3	10^2	10^{13}
10^{10}	10^8	10^{11}	10^5
10^7	10^9	10^6	10^{12}
10^1	10^{14}	10^{15}	10^4

79 **Vrai ou Faux**

P.1. $(-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) = 4^{-2}$

P.2. 2^{16} est le double de 2^8.

P.3. $1 + 2^3 = 27$

P.4. $\dfrac{10^5}{10^{-5}} = 1$

P.5. $(-5)^{-1} = -5^{-1}$

P.6. L'inverse de 6^2 est 6^{-2}.

P.7. L'opposé de 5^2 est $(-5)^2$.

P.8. $10^7 \times 10^{-7} = 0$

P.9. 3 est l'écriture scientifique d'un nombre.

P.10. $10^{-1} + 10^{-2} = 10^{-3}$

80 Calcule et donne le résultat sous la forme d'une écriture scientifique, puis décimale.

a. $3 \times 10^3 \times 80 \times 10^5$
b. $50 \times 10^3 \times 2 \times 10^5$
c. $3 \times 10^8 \times 5 \times 10^{-7}$
d. $3 \times 10^{10} \times 7 \times 10^{-6}$
e. $-3 \times 10^2 \times 1 \times 10^{-5}$
f. $5 \times 10^6 \times 0{,}3 \times 10^{-6}$

81 Écris chaque nombre sous la forme d'une fraction simplifiée.

$A = \left(\dfrac{3}{5}\right)^2$
$B = \left(\dfrac{-1}{4}\right)^3$
$C = -\left(\dfrac{-3}{10}\right)^5$
$D = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2}$
$E = \left(\dfrac{5}{2}\right)^{-3}$
$F = \left(\dfrac{-1}{2}\right)^{-4}$

82 Associe les nombres égaux.

1	•	•	$10^{-1} \times 10^{-1}$
0,1	•	•	$10^1 : 10^1$
0,01	•	•	$10^1 : 10^{-1}$
100	•	•	$10^{-1} \times 10^0$

Calcul littéral

83 **QCM**

a. $5 \times (3 + x) =$

R.1	R.2	R.3
$5 \times 3 + 3 \times x$	$5 \times 3 + x$	$5 \times 3 + 5 \times x$

b. $-5(3t - 1) =$

R.1	R.2	R.3
$-15t - 1$	$-15t + 5$	$-15t - 5$

c. $83 \times 99 =$

R.1	R.2	R.3
8 300 – 1	8 300 – 83	8 300 + 83

d. $(x + 3)(2x + 1) =$

R.1	R.2	R.3
$2x^2 + 3$	$2x^2 + 7x + 3$	$7x + 1$

e. $(2 - 5x) - (-2x + 3) =$

R.1	R.2	R.3
$-3x - 1$	$-3x + 5$	$-7x + 4$

84 Associe les expressions égales.

$5(x - 2)$ •	• $-5x - 10$
$-5(x - 2)$ •	• $5x + 10$
$-5(x + 2)$ •	• $-5x + 10$
$-5(-x - 2)$ •	• $5x - 10$

85 Développe les expressions suivantes.

$A = 5 \times (x + 1)$

$B = (x + 4) \times 7$

$C = 5(9 - x)$

$D = -3(-x + 7)$

86 Développe les expressions suivantes.

$M = 7(2z - 3)$

$N = 3y(y + 5)$

$P = -8(-5 - 3y)$

$Q = -6z(2 + 9z)$

$W = (2t + 2) \times 4t$

$X = -2z(4 - 5z)$

87 Calcule astucieusement.

a. 54×101

b. $1\,001 \times 14$

c. $99 \times 2{,}1$

d. $0{,}15 \times 999$

88 Factorise les expressions suivantes.

$E = 9 - 72x$

$F = 3x^2 + x$

$G = -6x - 18$

$H = 3y^2 + 9y^2$

89 Factorise les expressions suivantes.

$V = 24x + 12y$

$W = 24x + 36y - 18z$

$Y = 15xy + 45xz$

$Z = 15x^2y - 15xy^2$

90 Réduis lorsque c'est possible.

a. $12x - y + 9$

b. $7y + 10 - 11y$

c. $15 - 4d + 3$

d. $3 - x + x^2 + 5x$

e. $9t - 12t + t^2 - 5$

f. $a^2 + b - 3a + 8b$

91 Réduis les expressions.

$A = 16x + 7 - 9x + 2$

$B = 5z + 4{,}5 - z + 0{,}5$

$C = 3 + 4t + 12t - 7t - 3$

$D = 5x^2 + 4 + 2x^2 - 1$

$E = 15t^2 - 4t^2 + 2t^2 + 9$

92 Associe les expressions égales.

$3x + 5 + 2x$ •	• $-x + 5$
$-3x + 5 + 2x$ •	• $x - 5$
$3x - 5 - 2x$ •	• $-x - 5$
$-3x - 5 + 2x$ •	• $5x + 5$

93 QCM

a. $15 - 3x =$

R.1	R.2	R.3
$5(3 - x)$	$x(15 - 3)$	$3(5 - x)$

b. $7x + 3 - 9x - 5 =$

R.1	R.2	R.3
$2x - 2$	$10x - 4$	$-2x - 2$

c. $33 \times 98 + 33 \times 2 =$

R.1	R.2	R.3
98×100	66×100	33×100

94 Développe et réduis chaque expression.

$E = (x + 1)(x + 2)$

$F = (y + 2)(2y + 3)$

$G = (5z + 4)(2 - 6z)$

$H = (-4t + 8)(3 - 3t)$

95 Supprime les parenthèses puis réduis chaque expression.

$A = 8 + (2x + 5)$

$B = 3x - (2 - 4x)$

$C = (x - 6) - 6$

$D = (7x + 2) + (-6x - 2)$

$E = -(-3x - 1) + (x - 4)$

$F = 8x - (5x + 7) + (1 - 4x)$

96 Vrai ou Faux

P.1. Pour $b = \frac{1}{2}$, $4b^2 + 1 = 2$.

P.2. Pour toute valeur de b, $4b^2 + 1 = 2$.

P.3. x désignant un nombre relatif, si A est le produit de la somme de x et de 5 par la différence entre $2x$ et 1, alors $A = 2x^2 + 9x - 5$.

P.4. Si n est un nombre entier, $(n - 1)(n + 1) + 1$ est toujours égal au carré d'un nombre entier.

97 Exprime chaque expression en fonction de x (x étant non nul).

a. le double de x ;

b. l'opposé de x ;

c. l'inverse de x ;

d. l'opposé du double de x ;

e. le carré de l'opposé de x ;

f. l'opposé de l'inverse de x ;

g. le double de l'inverse de x.

98 Soit x l'âge de Sandra aujourd'hui. Comment note-t-on...

a. l'âge qu'elle aura dans cinq ans ?

b. le triple de son âge ?

c. le double de l'âge qu'elle avait il y a deux ans ?

d. la moitié de l'âge qu'elle aura dans dix ans ?

99 Recopie chaque expression en rajoutant les signes $\times$ sous-entendus, puis calcule-les pour $x = -2$.

$A = 3x$

$B = 5x + 1$

$C = (x - 3)(x + 1)$

$D = 3x - 2(4x - 1)$

$E = 7x^2$

$F = 17 - 3x$

$G = 5(2x - 2)$

$H = x(x + 1) - 9x$

100 Recopie et complète le tableau suivant.

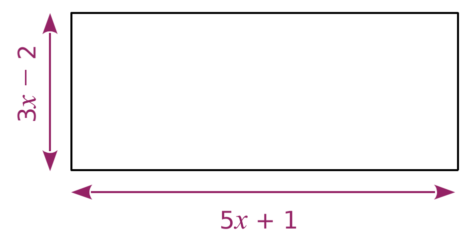
	$x = 1$	$x = 0$	$x = -3$
$7(2x - 7) - 2x$			
$(x - 1)(x - 5)$			
$(1 - x)^2$			

101 Voici un programme de calcul.

- Choisir un nombre x ;
- Multiplier ce nombre par 5 ;
- Ajouter 7 ;
- Multiplier le résultat par 20 ;
- Enlever 140.

Max dit qu'à la seule annonce du résultat, il est capable de retrouver très vite le nombre choisi. Comment fait-il ?

102 On considère le rectangle ci-dessous.



Exprime son aire et son périmètre, en fonction de x, sous la forme d'une expression réduite.

Approchez, approchez !

Le nombre $\sqrt{2}$ est le nombre qui, multiplié par lui-même, donne 2.

a. Explique pourquoi ce nombre est la longueur de la diagonale d'un carré de côté 1.

b. Justifie que $\sqrt{2}$ est compris entre 1,4 et 1,5.

c. Propose une méthode pour déterminer la deuxième, puis la troisième décimale de $\sqrt{2}$.

d. Dans une encyclopédie mathématique, on peut trouver la formule suivante :

$$\sqrt{2} = \left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{7}\right)\ldots$$

Que signifient les pointillés ?

e. Voici une suite d'expressions mathématiques :

$\left(1+\frac{1}{1}\right)$;

$\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)$;

$\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)$;

$\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{7}\right)$.

Quel lien y a-t-il entre ces expressions et la question précédente ?
Écris les deux expressions permettant de poursuivre cette liste.

f. À l'aide de la calculatrice, donne les valeurs exactes de ces six expressions.

g. La feuille de calcul suivante permet d'obtenir les valeurs approchées de chacune des expressions de la question **e**.

	A	B	C	D	E
1			Les inverses des nombres de la colonne B		Les valeurs approchées successives
2	1	1	1	2	2
3	-1	3	0,3333333333	0,6666666667	1,3333333333
4	1	5	0,2	1,2	1,6
5	-1	7	0,1428571429	0,8571428571	1,3714285714
6	1	9	0,1111111111	1,1111111111	1,5238095238
7	-1	11	0,0909090909	0,9090909091	1,3852813853
8	1	13	0,0769230769	1,0769230769	1,4918414918

Voici quelques indications pour t'aider à construire cette feuille de calcul :

- La cellule A3 contient la formule =A2*(–1) .
- La cellule B3 contient une formule faisant référence à la cellule B2.
- Les cellules de la colonne C contiennent des formules faisant référence aux cellules de la colonne B.
- Les cellules de la colonne D permettent de calculer les facteurs : $\left(1+\frac{1}{1}\right)$; $\left(1-\frac{1}{3}\right)$; $\left(1+\frac{1}{5}\right)$ ...
- Les cellules de la colonne E contiennent les valeurs approchées des expressions de la question **e**.

h. À l'aide de la feuille de calcul, détermine la valeur de la centième expression et compare le résultat avec la valeur de $\sqrt{2}$. Combien de décimales exactes de $\sqrt{2}$ obtient-on à la centième étape ?

N1

Arithmétique

1 Division euclidienne

Cours : 1

a Le confiseur La Cabosse décide de vendre des ballotins de 13 chocolats. Ayant fabriqué 175 bouchées, il se demande combien de boites il pourra proposer, et combien de chocolats il lui restera. Quelle opération permet de résoudre ce problème et quelle est l'égalité correspondante ? Pourquoi le reste de chocolats est-il nécessairement inférieur à 13 ?

b Mêmes questions pour :

- 5 870 chocolats dans des boites de 37 chocolats ;
- 329 chocolats dans des boites de 9 chocolats.

c Pour le confiseur, quelles situations correspondent aux égalités suivantes ?

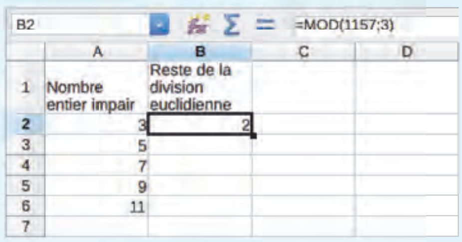
- $933 = 54 \times 17 + 15$
- $17 \times 35 + 21 = 616$
- $143 = 11 \times 13$

2 Nombres premiers

Cours : 2A

a Combien de diviseurs possède le nombre entier 306 ?

b Un nombre entier supérieur à 1 est un nombre premier s'il admet exactement 2 diviseurs : 1 et lui-même.
Écris les 10 premiers nombres premiers.
Que peux-tu dire d'un nombre pair différent de 2 ?



c À l'aide du tableur, construis une feuille de calcul pour déterminer si 1 157 est premier ou non. Pour cela, la colonne A doit contenir les nombres entiers impairs, et la colonne B le reste de la division euclidienne du nombre entier 1 157 par le nombre de la colonne A.

- Pourquoi est-il inutile d'écrire les nombres pairs dans la colonne A ?
- D'après toi, pourquoi est-il inutile de tenter les divisions au-delà de l'entier 35 ?
- 1 157 est-il un nombre premier ?

d 1 381 , 7 387 et 3 967 sont-ils des nombres premiers ?

3 Décomposition

Cours : 2B

a Regarde attentivement la décomposition suivante de l'entier 306 :

$$306 = 2 \times 153 = 2 \times 3 \times 51 = 2 \times 3 \times 3 \times 17$$

Pourquoi n'est-il plus possible de poursuivre la décomposition après $2 \times 3 \times 3 \times 17$?

b Décompose de la même manière les nombres entiers 210, 64 et 143.

c Voici la liste des nombres premiers inférieurs à 20 : 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19
Essaie de trouver une méthode pour décomposer un nombre entier inférieur à 400 en utilisant cette liste. Tu pourras étudier les entiers cités en **a** et **b**, ainsi que 391 et 397.

d Selon toi, est-il toujours possible de décomposer un nombre entier non premier en un produit de facteurs premiers ?

1 Division euclidienne

A Division euclidienne

→ 18

Propriété Soient a et b deux nombres entiers positifs, avec b non nul.

Effectuer la **division euclidienne** de a par b, c'est trouver le couple unique d'entiers positifs q et r vérifiant : $a = b \times q + r$ avec $r < b$.

Exemple :

Prenons $a = 187$ et $b = 13$.
On pose la division euclidienne pour obtenir q et r.
Donc $187 = 13 \times 14 + 5$ avec $5 < 13$

$$\begin{array}{r|l} 187 & 13 \\ \hline 5 & 14 \end{array}$$

B Multiples et diviseurs

→ 32

Définitions Soient a et b deux nombres entiers positifs, avec b non nul.

Si $r = 0$, alors l'égalité précédente devient $a = b \times q$.
On dit alors que a est un **multiple** de b et que b est un **diviseur** de a, ou encore que b **divise** a.

Exemple :

Prenons $a = 135$ et $b = 15$. On a : $135 = 15 \times 9 + 0 = 15 \times 9$
Donc 135 est un multiple de 15, et 15 est un diviseur de 135.

Remarques :

- Un nombre entier a un nombre fini de diviseurs, mais un nombre infini de multiples.
- Un nombre entier supérieur à 1 admet toujours au moins deux diviseurs : 1 et lui-même.

C Critères de divisibilité

→ 40

Propriétés

- Un nombre entier est divisible par 2 si son chiffre des unités est 0, 2, 4, 6 ou 8. Dans ce cas, on dit qu'il est pair.
- Un nombre entier est divisible par 3 si la somme de ses chiffres est un multiple de 3.
- Un nombre entier est divisible par 4 si le nombre constitué de ses deux derniers chiffres (dizaines et unités) est divisible par 4.
- Un nombre entier est divisible par 5 si son chiffre des unités est 0 ou 5.
- Un nombre entier est divisible par 9 si la somme de ses chiffres est un multiple de 9.

Exemple :

- 915 n'est pas divisible par 2 car il ne se termine pas par 0, 2, 4, 6 ou 8. C'est un nombre impair.
- 915 n'est pas divisible par 4 car le nombre formé par ses deux derniers chiffres, 15, n'est pas divisible par 4. D'ailleurs, comme il n'est pas divisible par 2, il ne peut pas être divisible par 4.
- 915 est divisible par 5 car son chiffre des unités est 5.
- 915 est divisible par 3 car la somme de ses chiffres : $9 + 1 + 5 = 15$ est un multiple de 3. Mais il n'est pas divisible par 9 car 15 n'est pas un multiple de 9.

2 Nombres premiers

A Définition

→ 43

Définition Un nombre entier supérieur à 1 est un nombre premier s'il a exactement deux diviseurs : 1 et lui-même.

Exemples :

- Voici tous les nombres premiers inférieurs à 40 : 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29 ; 31 ; 37.
- 91 n'est pas divisible par 2, 3, 5 ou 9 d'après les critères, mais ce n'est pas pour autant qu'il est premier. Pour le savoir, il faut essayer de le diviser par les nombres premiers de la liste précédente. 91 est divisible par 7 car $91 = 13 \times 7$. Donc 91 n'est pas un nombre premier.

B Décomposition en facteurs premiers

→ 49

Propriété Tout nombre entier n supérieur à 1 peut s'écrire sous la forme d'un produit de nombres premiers.
Quand on écrit la décomposition sous la forme $n = p_1^{\alpha_1} \times \ldots \times p_k^{\alpha_k}$, cette écriture est **unique**, à l'ordre près des facteurs, et est appelée **décomposition en facteurs premiers** de l'entier n.

Exemple :

$504 = 8 \times 63 = 8 \times 9 \times 7 = 2^3 \times 3^2 \times 7$

Propriété Pour décomposer un nombre entier en un produit de facteurs premiers, on décompose progressivement cet entier à l'aide de nombres premiers.

Exemple :

On veut décomposer l'entier 3 626 en produits de facteurs premiers.
2 est un diviseur de 3 626 donc $3\,626 = 2 \times 1\,813$. On essaie maintenant de décomposer 1 813.
7 est un diviseur de 1 813 donc $3\,626 = 2 \times 7 \times 259$. On essaie maintenant de décomposer 259.
7 est un diviseur de 259 donc $3\,625 = 2 \times 7 \times 7 \times 37$. On essaie maintenant de décomposer 37.
37 est un nombre premier, donc la décomposition de 3 625 est $3\,625 = 2 \times 7^2 \times 37$.

C Fraction irréductible

Définition Une fraction est dite **irréductible** quand il n'est plus possible de la simplifier.

Exemples :

$\frac{14}{21}$ n'est pas une fraction irréductible car $\frac{14}{21} = \frac{2}{3}$. Par contre, $\frac{7}{15}$ est irréductible.

Remarque :

Pour écrire une fraction sous sa forme irréductible, on décompose son numérateur et son dénominateur en produit de facteurs premiers, et on simplifie. Quand on ne peut plus simplifier la fraction, elle est irréductible.

Exemple :

$\frac{168}{3\,626} = \frac{2^3 \times 3 \times 7}{2 \times 7^2 \times 37} = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 7}{2 \times 7 \times 7 \times 37} = \frac{2 \times 2 \times 3}{7 \times 37} = \frac{12}{259}$, où $\frac{12}{259}$ est une fraction irréductible.

Exercices

Voir aussi les Questions FLASH dans le manuel numérique !

À l'oral !

1 Détermine de tête le quotient et le reste des divisions euclidiennes suivantes.

a. 47 par 5 **b.** 50 par 7 **c.** 67 par 3

2 La division euclidienne ci-dessous est exacte. Donne l'égalité correspondante.

$$\begin{array}{r|l} 117 & 11 \\ \hline 7 & 10 \end{array}$$

3 ***Coup double***

a. Pose deux divisions euclidiennes différentes qui correspondent à l'égalité : $158 = 9 \times 17 + 5$.

b. Peut-on poser deux divisions euclidiennes différentes qui correspondent à l'égalité : $181 = 10 \times 17 + 11$? Explique.

4 Sans faire aucun calcul, explique pourquoi les égalités ci-dessous ne peuvent pas correspondre à une division euclidienne.

a. $212 = 15 \times 13 + 17$

b. $125 = 14 \times 8{,}5 + 6$

5 Compose six phrases avec les mots et nombres suivants (ils seront tous utilisés au moins une fois).

36 — 6 — diviseur — divisible — 216 — 7 — 1 — multiple

6 Donne cinq multiples et cinq diviseurs du nombre 60.

7 Pour chacun des nombres ci-dessous, indique s'il est divisible par 2 ; 3 ; 4 ; 5 ou 9.

a. 990 **b.** 71 **c.** 6 537 **d.** 875

8 Quelles sont toutes les possibilités pour que le nombre ci-dessous soit multiple à la fois de 9 et de 2 ?

7 . 7 .

9 Pour chaque nombre ci-dessous, indique s'il est premier ou non.

a. 99 **b.** 19 **c.** 5 **d.** 169

10 Pour chaque nombre ci-dessous, donne sa décomposition en facteurs premiers.

a. 24 **b.** 51 **c.** 80 **d.** 225

11 Pour chaque expression ci-dessous, indique s'il s'agit bien d'une décomposition en facteurs premiers et, si oui, donne le nombre correspondant.

a. $5 \times 3^2 \times 11$ **c.** $2^3 \times 3^2 \times 5$

b. $3^3 \times 4^5 \times 13$ **d.** $7^2 \times 13^2 \times 33$

12 Les fractions ci-dessous sont-elles irréductibles ? Justifie.

a. $\frac{1}{100}$ **b.** $\frac{20}{44}$ **c.** $\frac{97}{13}$ **d.** $\frac{156}{117}$

13 Rends ces fractions irréductibles.

a. $\frac{16}{6}$ **b.** $\frac{36}{9}$ **c.** $\frac{45}{55}$ **d.** $\frac{26}{39}$

14 **Vrai ou Faux**

P.1. Dans une division euclidienne, le reste ne peut pas être nul.

P.2. Dans la division euclidienne de 237 par 15, je peux trouver 20 comme reste car $20 < 237$.

P.3. 23 est un multiple de 46.

P.4. 23 n'a que deux diviseurs différents.

P.5. 555 est divisible par 3 et 5.

P.6. 59 est un nombre premier.

P.7. $\frac{17}{51}$ est une fraction irréductible.

Division euclidienne

15 **Vrai ou Faux**

P.1. Dans une division euclidienne par 6, il n'y a que cinq restes possibles.

P.2. Dans une division euclidienne, le reste est toujours inférieur au diviseur.

P.3. Dans une division euclidienne, le reste est toujours inférieur au quotient.

P.4. Dans une division euclidienne, le reste peut être égal au dividende.

16 ***Quels restes ?***

a. Quels sont tous les restes possibles dans une division euclidienne par 3 ?

b. Que peut-on dire des nombres pour lesquels le reste dans la division euclidienne par 2 est 1 ?

17 Détermine de tête le quotient et le reste des divisions euclidiennes suivantes.

a. 46 par 5
b. 70 par 8
c. 60 par 7
d. 7 par 15
e. 2016 par 2
f. 100 par 9

18 Recopie et complète les divisions euclidiennes suivantes. Dans chaque cas, écris l'égalité correspondante.

a.
```
2 3 8 | 6
  . . |----
      | . .
    .
```

b.
```
6 9 4 | 8
  . . |----
      | . .
    .
```

c.
```
9 8 0 | 1 2
  . . |------
      | . .
    .
```

d.
```
7 0 2 | 1 9
. . . |------
      | . .
  . .
```

19 Pose et effectue les divisions euclidiennes suivantes. Dans chaque cas, écris l'égalité correspondante.

a. 165 divisé par 7
b. 700 divisé par 11
c. 6 065 divisé par 25
d. 5 000 divisé par 60

20 Dans le roman de Jules Verne, Philéas Fogg doit faire le tour du monde en 80 jours.

a. Combien cela représente-t-il de semaines ?

b. S'il part un jeudi, quel jour reviendra-t-il ?

21 Dans une bibliothèque, 360 livres sont à ranger sur des étagères contenant 22 livres chacune.

a. Combien faut-il d'étagères pour ranger tous ces livres ?

b. Combien peut-on ranger de livres supplémentaires sur la dernière étagère utilisée ?

22 Une sortie scolaire est organisée au collège. 179 élèves vont en profiter, encadrés par 12 accompagnateurs. Les bus choisis peuvent transporter 56 personnes au maximum.

a. Combien faut-il prévoir de bus ?

b. Combien d'élèves supplémentaires pourrait-on emmener si on complétait tous les bus ?

23 Pour le déjeuner de lundi prochain, le cuisinier du collège prévoit de faire des omelettes aux 500 élèves demi-pensionnaires. Il compte 9 œufs par omelette et une omelette pour 4 élèves. Il prépare sa commande d'œufs, sachant qu'ils sont livrés par carton de 60. Combien de cartons doit-il prévoir ? Combien d'œufs aura-t-il en trop ?

24 On considère la division euclidienne de A par B. Recopie et complète le tableau suivant, dans lequel A désigne le dividende, B le diviseur, Q le quotient entier et R le reste.

A	B	Q	R	Égalité
463	6			
	15	13	8	
938		104	2	
				$320 = 3 \times 106 + 2$
				$592 = 74 \times 8$

25 **QCM**

a. $\begin{array}{r|l} \dots & 15 \\ \cline{2-2} 9 & 13 \end{array}$

Pour trouver le nombre manquant dans cette division euclidienne, je fais l'opération...

R.1	R.2	R.3
$13 \times 9 + 15$	$9 \times 15 + 13$	$13 \times 15 + 9$

b. Quel peut être le reste d'une division euclidienne par 15 ?

R.1	R.2	R.3
0,5	11	18

c. À quelle division euclidienne correspond l'égalité : $116 = 9 \times 12 + 8$?

R.1	R.2	R.3
$\begin{array}{r\|l} 116 & 8 \\ \cline{2-2} 9 & 12 \end{array}$	$\begin{array}{r\|l} 116 & 12 \\ \cline{2-2} 9 & 8 \end{array}$	$\begin{array}{r\|l} 116 & 9 \\ \cline{2-2} 8 & 12 \end{array}$

26 Arthur doit déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de 1 507 par 3.

« Facile ! se dit-il. $1\,507 = 3 \times 500 + 7$. »

a. L'égalité écrite par Arthur est-elle vraie ?

b. Peut-il en déduire que le quotient cherché est 500 et le reste 7 ? Explique ta réponse.

27 Donne le quotient et le reste de la division euclidienne de...

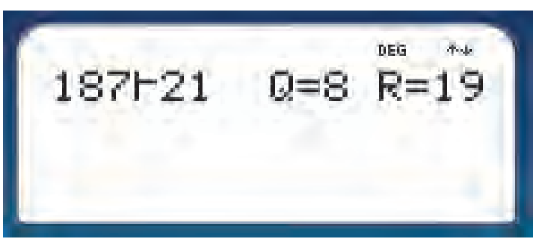
a. 154 par 2, sachant que $154 \times 23 + 2 = 3\,556$.

b. 244 par 8, sachant que $29 \times 8 + 12 = 244$.

c. 325 par 4, sachant que $325 = 78 \times 4 + 13$.

28 ***Une division peut en cacher d'autres***

On a effectué, à la calculatrice, la division euclidienne de 187 par 21.



En observant la capture d'écran ci-dessus, donne le quotient et le reste...

a. de la division euclidienne de 187 par 8 ;

b. de la division euclidienne de 189 par 21.

Divisibilité

29 **Vrai ou Faux**

P.1. 4 est un diviseur de 36.

P.2. 56 est un multiple de 6.

P.3. 4 divise 34.

P.4. 64 est divisible par 8.

30 On considère les nombres entiers suivants.

8	3	12	1	48

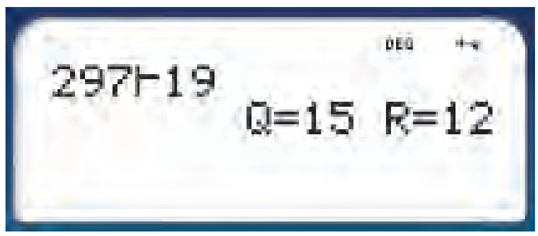
a. Recopie et complète les phrases suivantes en utilisant les mots **divisible**, **diviseur**, **multiple**.

- 12 est ... 3 ;
- 8 est ... 48 ;
- 48 est ... 3.

b. Parmi les cinq nombres, y en a-t-il un qui est divisible par tous les autres ? Si oui, lequel ?

c. Parmi les cinq nombres, y en a-t-il un qui est multiple de tous les autres ? Si oui, lequel ?

31 On a effectué, à la calculatrice, la division euclidienne de 297 par 19.



a. 297 est-il divisible par 19 ?

b. Donne, en expliquant, le plus petit multiple de 19 supérieur à 297.

32 ***Calcul mental***

a. 210 est-il divisible par 7 ? Et 220 ?

b. Trouve tous les nombres divisibles par 7, compris entre 220 et 260.

c. Parmi ces nombres, quels sont ceux qui sont divisibles par 4 ?

33 Combien existe-t-il...

a. de nombres pairs à deux chiffres ?

b. de multiples de 3 à deux chiffres ?

c. de multiples de 3 à trois chiffres ?

34 QCM

a. Quel nombre est un diviseur de 34 ?

R.1	R.2	R.3
68	4	2

b. Comme 27 × 37 = 999, alors...

R.1	R.2	R.3
37 est un multiple de 999.	999 est un diviseur de 37.	999 est divisible par 37.

c. 339 est divisible par...

R.1	R.2	R.3
9	3	6

35 ***Diviseurs***

a. Trouve tous les diviseurs du nombre 32.

b. Trouve tous les diviseurs du nombre 81.

c. Trouve tous les diviseurs du nombre 120.

d. Trouve tous les diviseurs du nombre 31.

36 ***Multiples***

a. Trouve tous les multiples du nombre 11 compris entre 100 et 200.

b. Trouve tous les multiples du nombre 19 compris entre 200 et 300.

c. Trouve un nombre de deux chiffres, à la fois multiple de 15 et multiple de 12.

37 Reproduis et complète le tableau suivant.

Divisible...	par 2	par 3	par 5	par 9	par 10
456					
999					
185					
1 530					
......	Non	Oui	Oui	Non	Non
......	Oui	Oui	Non	Oui	Non

38 ***Nombres à trouver***

a. Trouve un nombre compris entre 20 000 et 25 000, multiple de 3, de 100, mais pas de 9, ni de 7.

b. Trouve tous les nombres de trois chiffres divisibles à la fois par 3 et par 5, et dont le chiffre des centaines est 7.

39 Vrai ou Faux

P.1. Si un nombre est divisible par 9, alors il est divisible par 3.

P.2. Si un nombre est divisible par 3, alors il est divisible par 9.

P.3. Si un nombre est divisible par 6, alors il est divisible par 2 et par 3.

P.4. Si un nombre est divisible par 2 et par 3, alors il est divisible par 6.

40 ***Réciproquement ?***

a. Démontre que, si un nombre est divisible par 18, alors il est divisible par 3 et par 6.

b. La réciproque est-elle vraie ? Justifie.

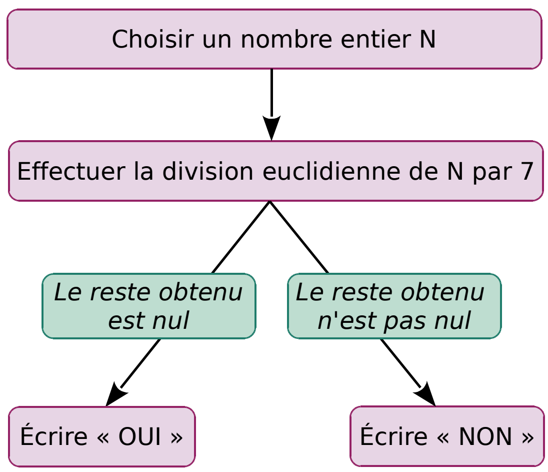
41 ***Multiples de 15***

a. Démontre que, si un entier est multiple de 15, alors il est aussi multiple de 3 et de 5.

b. La réciproque semble-t-elle vraie ?

42 ***Algorithme et divisibilité***

On considère l'algorithme suivant.



a. Teste cet algorithme en choisissant plusieurs nombres de départ.

b. Quel est le résultat de cet algorithme pour N = 427 ? Et pour N = 430 ?

c. En choisissant 125 879, on obtient le résultat « NON ». En choisissant 227 976, on obtient le résultat « OUI ».

Que peut-on en déduire concernant ces deux nombres ?

d. Recopie et améliore l'algorithme, de façon à ce qu'il permette de tester, étant donnés deux nombres entiers, si le premier est divisible par le second.

Nombres premiers

43 Quels sont les nombres premiers dans la liste suivante ?

12 | 1 | 13 | 21 | 5 | 87 | 37

44 Même consigne qu'à l'exercice précédent.

642 | 47 | 111 | 23 | 65 | 39

45 ***Le jeu de Juniper-Green***

Règle du jeu : Ce jeu se joue à deux (ou plus) avec les nombres entiers de 1 à 40.

- Le premier joueur choisit un nombre entier.
- Le deuxième joueur doit en choisir un autre qui doit être : soit multiple, soit diviseur de ce premier nombre, et toujours parmi les nombres entiers de 1 à 40.
- Le joueur suivant en choisit un troisième qui doit être : soit multiple, soit diviseur du second nombre.
- Et ainsi de suite, chaque nombre ne pouvant servir qu'une seule fois !
- Le dernier joueur qui a pu choisir un nombre a gagné.

a. Le premier joueur prend 40 comme nombre de départ. Quelle est la liste des nombres possibles pour le second joueur ?
Même question avec 17 ; 9 et 23.

b. Quand ce jeu se joue à deux, il existe une stratégie gagnante pour le premier joueur. Peux-tu expliquer cette stratégie ?

46 On considère les cinq nombres suivants.

115	158	123	77	121

a. Pourquoi est-on sûr qu'aucun de ces nombres n'est premier ?

b. Écris chacun de ces nombres comme produit de deux nombres premiers.

47 ***Somme et produit***

a. Donne deux nombres premiers dont la somme est encore un nombre premier.

b. Donne deux nombres non premiers dont la somme est un nombre premier.

c. Donne deux nombres premiers dont la somme n'est pas un nombre premier.

d. Peux-tu trouver deux nombres premiers dont le produit est un nombre premier ? Explique.

48 Relie chaque nombre à sa décomposition en facteurs premiers.

$2 \times 5 \times 5 \times 7$ •	• 126
$3 \times 3 \times 5$ •	• 180
$2 \times 3 \times 3 \times 7$ •	• 98
$2^2 \times 3^2 \times 5$ •	• 350
2×7^2 •	• 45

49 Détermine la décomposition en facteurs premiers de chacun des nombres suivants.

a. 96 **c.** 840 **e.** 1 024

b. 97 **d.** 3 150 **f.** 36×15

50 Même consigne qu'à l'exercice précédent.

a. 54 **c.** 360 **e.** 243

b. 53 **d.** 9 900 **f.** 24×700

51 ***Fractions irréductibles***

a. Parmi les fractions suivantes, simplifie au maximum celles qui ne sont pas irréductibles.

• $\dfrac{265}{80}$ • $\dfrac{500}{77}$ • $\dfrac{64}{105}$ • $\dfrac{111}{999}$ • $\dfrac{19}{23}$

b. Sachant que $8\ 820 = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7^2$, et que $74\ 250 = 2 \times 3^3 \times 5^3 \times 11$, écris la fraction $\dfrac{8\ 820}{74\ 250}$ sous forme d'une fraction irréductible.

c. Rends irréductible la fraction $\dfrac{5\ 082}{3\ 960}$.

52 **QCM**

a. 607 est un nombre premier, donc...

R.1	R.2	R.3
ses seuls diviseurs sont 1 et 607	il n'a aucun diviseur	il n'a que deux multiples

b. Quelle expression est une décomposition en facteurs premiers ?

R.1	R.2	R.3
$3 \times 5^2 \times 12$	$7 \times 13^2 \times 31$	$2 \times 11^2 \times 15^3$

c. Quelle fraction est irréductible ?

R.1	R.2	R.3
$\dfrac{13}{33}$	$\dfrac{72}{62}$	$\dfrac{27}{57}$

53 Un philatéliste, également passionné d'arithmétique, possède près de 1 000 timbres ! Lorsqu'on lui demande combien il en a précisément, il répond :

« J'en ai... un certain nombre ! Un nombre pair, divisible par 3, par 5, et par 11 ! »

Sauras-tu retrouver le nombre exact de timbres de sa collection ?

54 ***Chez le fleuriste***

Un fleuriste dispose de 30 marguerites et 24 tulipes. Il veut composer des bouquets contenant le même nombre de marguerites et le même nombre de tulipes, et utiliser toutes ses fleurs.

a. Peut-il faire deux bouquets ? Quatre bouquets ? Cinq bouquets ?

b. Trouve toutes les possibilités, et précise, dans chaque cas, la composition des bouquets.

Tu pourras présenter tes résultats dans un tableau comme ci-après.

Nombre de bouquets	Nombre de marguerites par bouquet	Nombre de tulipes par bouquet

55 ***Challenge sportif***

Une compétition sportive regroupe 105 filles et 175 garçons. Les organisateurs souhaitent composer plusieurs équipes, et toutes les équipes doivent comporter le même nombre de filles et le même nombre de garçons. Tous les élèves doivent participer.

a. Les organisateurs peuvent-ils constituer 7 équipes ? Et 3 équipes ?
Peuvent-ils constituer un nombre pair d'équipes ? Justifie.

b. Comment les organisateurs doivent-ils s'y prendre pour constituer le plus grand nombre d'équipes ? Donne alors la composition de chaque équipe constituée.

56 ***Gourmand !***

Un pâtissier a préparé 840 financiers et 1 176 macarons. Il souhaite faire des lots de financiers et de macarons, tous identiques, en utilisant toutes ses pâtisseries.

a. Trouve la décomposition en facteurs premiers de 840, puis de 1 176.

b. Le pâtissier peut-il faire 21 lots ? Si oui, donne la composition de chaque lot.

c. Combien de lots peut-il faire au maximum ? Quelle sera alors la composition de chacun des lots ?

57 ***Carrelage***

Dans une salle de bain, Abbigail veut recouvrir le mur se trouvant au-dessus de la baignoire avec un nombre entier de carreaux de faïence, de forme carrée, dont le côté mesure un nombre entier de centimètres, le plus grand possible. Détermine la longueur, en centimètres, du côté d'un carreau de faïence, sachant que le mur mesure 210 cm de hauteur et 135 cm de largeur. Combien faudra-t-il de carreaux ?

58 Rends les fractions suivantes irréductibles.

a. $\frac{18}{24}$ **c.** $\frac{120}{150}$ **e.** $\frac{45}{63}$ **g.** $\frac{357}{561}$

b. $\frac{540}{288}$ **d.** $\frac{630}{924}$ **f.** $\frac{1\,540}{693}$ **h.** $\frac{1\,080}{1\,260}$

59 On s'intéresse aux nombres de trois chiffres de la forme $\overline{65u}$, où u représente le chiffre des unités.

a. Quelle(s) valeur(s) donner à u pour obtenir un multiple de 2 ?

b. Quelle(s) valeur(s) donner à u pour obtenir un multiple de 9 ?

c. Peut-on obtenir un nombre divisible par 15 ? Justifie.

60 *Synchrones !*

a. La montre d'Éric sonne toutes les 6 heures, et celle de Leïla toutes les 14 heures. Elles ont sonné ensemble le 9 octobre à 17 h 30. À quelle date et à quelle heure sonneront-elles ensemble de nouveau ?

b. Même question si la montre d'Éric sonne toutes les 15 heures, et celle de Leïla toutes les 21 heures.

61 *Le crible d'Ératosthène*

Il s'agit d'un algorithme pour obtenir la liste de tous les nombres premiers inférieurs à un nombre fixé au départ.

a. Écris la liste de tous les nombres entiers de 1 à 100. (Présente-les par exemple dans un tableau.)

b. 1 n'étant pas premier, tu peux le barrer. 2 étant premier, tu peux l'entourer. Que dire des multiples de 2 ?

c. Le prochain nombre non barré de la liste est 3. Est-il premier ? Et les multiples de 3 ?

d. Continue ainsi. Le prochain nombre de la liste est premier : on l'entoure. Puis on barre tous ses multiples parmi les nombres non encore barrés.

e. L'algorithme s'arrête dès que le carré du plus petit entier restant est inférieur à 100 (car, dans ce cas, tous les nombres non-premiers ont déjà été barrés). Termine l'algorithme et donne la liste de tous les nombres premiers inférieurs à 100.

f. Applique à nouveau le crible d'Ératosthène pour déterminer la liste des nombres premiers inférieurs à 200. (Tu gagneras du temps en n'écrivant pas les nombres pairs, à part le 2 !)

62 *Critère de divisibilité par 3*

Il s'agit de démontrer que, si la somme des chiffres d'un nombre N est divisible par 3, alors le nombre N est divisible par 3.

a. Démontre que la somme ou la différence de deux multiples de 3 est un multiple de 3.
(Indication : un multiple de 3 est un nombre de la forme $3 \times k$, où k est un nombre entier.)

b. Soit N un nombre de deux chiffres avec : U son chiffre des unités, et D son chiffre des dizaines. Écris N en fonction de D et U.

c. On suppose donc que la somme des chiffres de N est un multiple de 3, c'est-à-dire que $D + U = 3 \times k$, où k est un nombre entier.
Démontre que N est un multiple de 3.
(Indication : tu pourras écrire que $10D + U = 9D + D + U$...)

63 *Critère de divisibilité par 11*

Un nombre est divisible par 11 si la différence entre la somme de ses chiffres de rangs pairs et la somme de ses chiffres de rangs impairs est nulle ou égale à un multiple de 11.

Exemple : 93 918 est divisible par 11 car $(9 + 9 + 8) - (3 + 1) = 22$ qui est multiple de 11.

Parmi les nombres suivants, lesquels sont divisibles par 11 ?

a. 682 **c.** 539 **e.** 50 359

b. 494 **d.** 17 479 **f.** 174 614

64 Vrai ou Faux

P.1. Il n'existe qu'un seul nombre qui soit à la fois multiple et diviseur d'un nombre entier donné.

P.2. Soit N un chiffre pair. Le nombre $\overline{NNN}$ (nombre de trois chiffres, tous identiques à N) est divisible par 2 et par 3.

P.3. Tous les multiples des diviseurs du nombre N sont des diviseurs de N.

P.4. Tous les nombres premiers sont impairs.

P.5. Le nombre qui suit un nombre premier n'est jamais premier.

P.6. Toute fraction de numérateur 1 est irréductible.

65 *Irrationalité du nombre racine de 2*

L'objectif est de démontrer qu'il est impossible d'écrire le nombre $\sqrt{2}$ sous forme d'une fraction. (On dit d'un tel nombre qu'il est **irrationnel**.)

Supposons que $\sqrt{2}$ puisse s'écrire sous la forme $\frac{p}{q}$, avec $\frac{p}{q}$ fraction irréductible.

a. Justifie alors l'égalité : $p^2 = 2q^2$.

b. Démontre que, lorsqu'un nombre est impair, alors son carré est toujours impair.

c. Déduis de ces deux questions que p est un nombre pair, c'est-à-dire de la forme $p = 2k$.

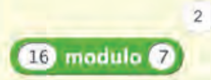
d. Utilise alors l'égalité de la question **a** pour prouver que q^2 est pair, et donc que q est pair.

e. Pourquoi est-il absurde de constater que p et q sont tous les deux pairs ? Conclus.

La démonstration que tu viens de faire s'appelle un **raisonnement par l'absurde** : on suppose le contraire de ce que l'on souhaite prouver, puis, en raisonnant logiquement, on aboutit à une contradiction manifeste.
Ce type de raisonnement a été notamment utilisé par **Euclide** pour démontrer qu'il existe une infinité de nombres premiers.

Liste des diviseurs

a. Dans Scratch, crée l'instruction (16 modulo 7) et double-clique sur cette instruction. Une info-bulle apparait qui contient le résultat de l'instruction. →



b. Que permet de calculer cette instruction ?

c. À l'aide de cette instruction, à quelle condition b est-il un diviseur de a ?

Le but de cette synthèse est d'écrire un programme dans Scratch affichant la liste des diviseurs d'un nombre entier. →

Voici le programme. Mais trois instructions ont été masquées. →

Pour chaque nombre entier inférieur au nombre proposé (qui est stocké dans (réponse)), le programme teste si ce nombre entier est un diviseur. Si c'est le cas, il stocke ce nombre entier dans une liste.

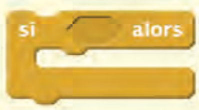
d. Crée une liste *diviseurs*. Cette liste est vidée au lancement du programme.

e. Explique l'instruction (ajouter 1 à diviseurs).

f. Crée le programme dans Scratch et trouve les trois instructions manquantes.

g. Est-il nécessaire de faire varier (i) jusqu'au nombre entier proposé ?

h. Comment compléter l'instruction



pour améliorer le programme ?

i. En utilisant l'instruction (longueur de diviseurs) et l'instruction de contrôle

, complète le programme afin qu'il dise si le nombre proposé est premier ou non.

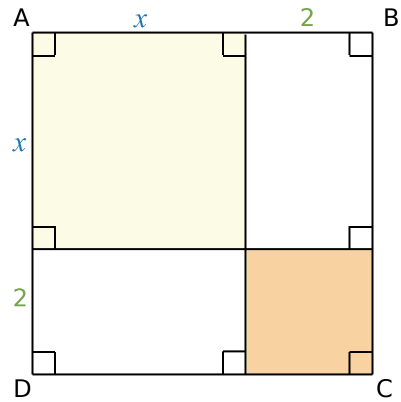
N2

Calcul littéral et équations

Activités

1 Remarquable !

Cours : 1



a Combien de quadrilatères comporte cette figure ? Quelles sont leurs natures ?

b Exprime l'aire de ABCD en fonction de x, de deux façons différentes.

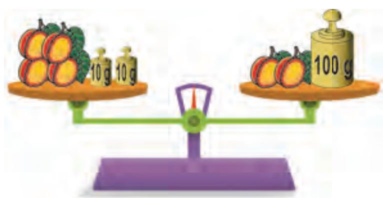
c Pourquoi peut-on en déduire que :
$(x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4$?

d **Application :** Calcule mentalement 102^2. Explique ta démarche.

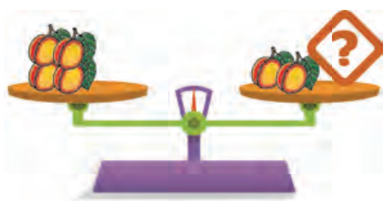
2 Une équation du premier degré

Cours : 2

On propose la pesée suivante :

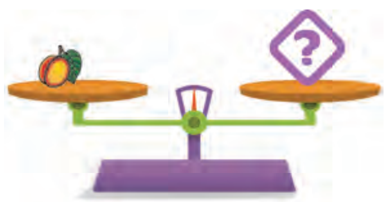


a Reproduis la balance ci-dessous, puis complète le plateau de droite avec des masses, de telle manière que la balance reste en équilibre. (On suppose que les abricots ont tous la même masse.)



b Soit x la masse d'un abricot. La première pesée se traduit mathématiquement par l'égalité : $4x + 20 = 2x + 100$. Traduis de la même manière la seconde pesée. Comment passe-t-on de la première égalité mathématique à la seconde ?

c En poursuivant ainsi avec de nouvelles pesées, détermine la masse d'un abricot.



d **Application :** Résous l'équation $7x - 2 = 4x - 3$.

1 Identités remarquables

26 45

Propriétés Pour tous nombres réels a et b :

- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Exemple 1 : Développe et réduis l'expression $(x + 3)^2$.

On utilise l'identité $(a + b)^2$ avec $a = x$ et $b = 3$.

$(x + 3)^2 = x^2 + 2 \times x \times 3 + 3^2$ ⟶ On remplace a par x et b par 3 dans $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

$(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$ ⟶ On réduit l'expression obtenue.

Exemple 2 : Développe et réduis l'expression $(3x - 5)^2$.

On utilise l'identité $(a - b)^2$ avec $a = 3x$ et $b = 5$.

$(3x - 5)^2 = (3x)^2 - 2 \times 3x \times 5 + 5^2$ ⟶ On remplace a par $3x$ et b par 5 dans $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

Attention ! $a = 3x$ donc $a^2 = (3x)^2 = 3^2 \times x^2 = 9x^2$.

$(3x - 5)^2 = 9x^2 - 30x + 25$ ⟶ On réduit l'expression obtenue.

Exemple 3 : Développe et réduis l'expression $(7x + 2)(7x - 2)$.

On utilise l'identité $(a + b)(a - b)$ avec $a = 7x$ et $b = 2$.

$(7x + 2)(7x - 2) = (7x)^2 - 2^2$ ⟶ On remplace a par $7x$ et b par 2 dans $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.

$(7x + 2)(7x - 2) = 49x^2 - 4$ ⟶ On réduit l'expression obtenue.

Exemple 4 : Factorise l'expression $A = x^2 + 6x + 9$.

$A = x^2 + 6x + 9$ ⟶ On observe trois termes précédés du signe +.

$A = x^2 + 2 \times x \times 3 + 3^2$ ⟶ On met en évidence l'identité remarquable $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ avec $a = x$ et $b = 3$.

$A = (x + 3)^2$ ⟶ On remplace a par x et b par 3 dans $(a + b)^2$.

Exemple 5 : Factorise l'expression $B = 25x^2 - 20x + 4$.

$B = 25x^2 - 20x + 4$ ⟶ On observe trois termes et des signes différents.

$B = (5x)^2 - 2 \times 5x \times 2 + 2^2$ ⟶ On met en évidence l'identité remarquable $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$ avec $a = 5x$ et $b = 2$.

$B = (5x - 2)^2$ ⟶ On remplace a par $5x$ et b par 2 dans $(a - b)^2$.

Exemple 6 : Factorise l'expression $C = 64x^2 - 49$.

$C = 64x^2 - 49$ ⟶ On observe la différence de deux carrés.

$C = (8x)^2 - 7^2$ ⟶ On met en évidence l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ avec $a = 8x$ et $b = 7$.

$C = (8x + 7)(8x - 7)$ ⟶ On remplace a par $8x$ et b par 7 dans $(a + b)(a - b)$.

2 Équation du premier degré

→ 56 69

Propriétés

- Une égalité est conservée **si on ajoute** ou **si on soustrait un même nombre** à ses deux membres.

  si $a = b$, alors $a + c = b + c$

  si $a = b$, alors $a - c = b - c$

- Une équation est conservée **si on multiplie** ou **si on divise** ses deux membres **par un même nombre non nul**.

  si $a = b$, alors $a \times c = b \times c$

  si $a = b$, alors $\dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{c}$ (où $c \neq 0$)

Exemple : Résous l'équation $7x + 2 = 4x + 9$.

$$7x + 2 = 4x + 9$$
$$7x + 2 - 4x = 4x + 9 - 4x$$

→ **On élimine les termes en x dans le membre de droite** en retranchant $4x$ aux deux membres.

$$3x + 2 = 9$$
$$3x + 2 - 2 = 9 - 2$$

→ **On isole le terme en x dans le membre de gauche** en retranchant 2 aux deux membres.

$$3x = 7$$
$$\frac{3x}{3} = \frac{7}{3}$$

→ **On détermine la valeur de l'inconnue x** en divisant les deux membres par 3.

$$x = \frac{7}{3}$$

Ainsi $7x + 2 = 4x + 9$ lorsque $x = \dfrac{7}{3}$.

On peut vérifier que $\dfrac{7}{3}$ est bien une solution de l'équation $7x + 2 = 4x + 9$.

En effet, pour $x = \dfrac{7}{3}$: $7x + 2 = 7 \times \dfrac{7}{3} + \dfrac{6}{3} = \dfrac{55}{3}$ et $4x + 9 = 4 \times \dfrac{7}{3} + \dfrac{27}{3} = \dfrac{55}{3}$.

On conclut que $\dfrac{7}{3}$ est la solution de l'équation $7x + 2 = 4x + 9$.

3 Équation produit

→ 78

Propriété

Si un produit est nul, alors l'un au moins de ses facteurs est nul.

Autrement dit, si $A \times B = 0$, alors $A = 0$ ou $B = 0$.

Exemple : Résous l'équation $(x + 3)(x - 7) = 0$.

Si un produit est nul, alors l'un au moins de ses facteurs est nul.

On en déduit que : $x + 3 = 0$ ou $x - 7 = 0$

$x = -3$ ou $x = 7$

On peut vérifier que les valeurs trouvées sont bien solutions.

- Pour $x = -3$: $(x + 3)(x - 7) = (-3 + 3)(-3 - 7) = 0 \times (-10) = 0$.
- Pour $x = 7$: $(x + 3)(x - 7) = (7 + 3)(7 - 7) = 10 \times 0 = 0$.

Les solutions de l'équation produit $(x + 3)(x - 7) = 0$ sont : -3 et 7.

Voir aussi les Questions FLASH dans le manuel numérique !

À l'oral !

1 **Vrai ou Faux**

Pour tout nombre x :

P.1. $9x^2 = (3x)^2$

P.2. $9x^2 = (-3x)^2$

P.3. $-9x^2 = (-3x)^2$

P.4. $10x^2 = (5x)^2$

2 Développe et réduis ces expressions.

$A = 3(x + 5)$

$B = (y + 1)(4 + y)$

$C = -2(3 - 2z)$

$D = (3x + 2)(x - 4)$

3 Associe les expressions égales.

$(x + 1)^2$ •	• $x^2 - 1$
$(x - 1)^2$ •	• $x^2 - x$
$(x + 1)(x - 1)$ •	• $x^2 - 2x + 1$
$x(x - 1)$ •	• $x^2 + 2x + 1$

4 Développe puis réduis ces expressions.

$A = (a + 3)^2$

$B = (t - 7)^2$

$C = (4 + p)^2$

$D = (2x - 5)(2x + 5)$

$E = (5x + 5)^2$

$F = (3p + 5)(3p - 5)$

5 Un rectangle a une largeur égale à $x + 1$. Sa longueur est le double de sa largeur.

a. Quel est son périmètre ?

b. Quelle est son aire ?

6 Factorise en utilisant l'identité remarquable : $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

$A = x^2 - 16$

$B = 25y^2 - 9$

7 Calcule mentalement.

a. 97^2

b. 97×103

c. 103^2

d. $103^2 - 97^2$

8 Associe les équations à leur solution.

$5x = 3 + x$

$3x + 1 = -5$

$x = -1$

$4x + 1 = 3x$

$x = -\frac{8}{3}$

$x = \frac{3}{4}$

$x = -2$

$3x + 5 = -3$

9 Résous les équations suivantes.

a. $(x + 4)x = 0$

b. $(x - 6)(3 + x) = 0$

c. $(5 - 2x)(2x - 5) = 0$

d. $(7 - x)^2 = 0$

10 Pour les deux membres de chaque équation ci-dessous, réalise l'opération demandée.

a. $-3x + 2 = -7$ ⟶ Ajouter $3x$

b. $3x - 5 = 3 - 2x$ ⟶ Multiplier par 5

c. $-8x = -7$ ⟶ Diviser par -8

11 Associe chaque équation à ses solutions.

$(x + 3)(x + 1) = 0$ •	• -1 et 3
$(x - 3)(x + 1) = 0$ •	• 1 et 3
$(x + 3)(x - 1) = 0$ •	• -1 et -3
$(x - 3)(x - 1) = 0$ •	• 1 et -3

12 **Vrai ou Faux**

P.1. Pour tout x : $(2x + 1)^2 = 4x^2 + 1$

P.2. Pour tout x : $(2x + 3)(2x - 3) = 4x^2 - 9$

P.3. $\frac{2}{3}$ est la solution de l'équation :

$-3x + 2 = -2 + 3x$

P.4. L'équation $12x = 0$ a une infinité de solutions.

P.5. $(3x - 1) + (7 - x) = 0$ est une équation produit.

Identités remarquables

13 **Vrai ou Faux**

Pour tout nombre x :

P.1. x^2 est égal à $2x$.

P.2. $(5x)^2$ est égal à $5x^2$.

P.3. $8x - 3$ est égal à $5x$.

P.4. $18x$ est égal à $2 \times x \times 9$.

P.5. $2x + 9x$ est égal à $11x$.

P.6. $(-2x)^2$ est égal à $4x^2$.

14 Réduis les expressions suivantes.

a. $5x + 3x$

b. $3x - 8x$

c. $-4x + 15x$

d. $-9x - 6x$

15 Réduis les expressions suivantes.

a. $2x + 7x - 5x$

b. $2{,}5x - 0{,}5x - 2x$

c. $-12x^2 + 2x^2 - x^2$

d. $3x^2 + 12x - 2x^2 - 9x$

16 Réduis les expressions suivantes.

$A = 11x + 3 - 6x + 7$

$B = -5x^2 - 9 + 3x^2 - 1$

$C = 11x - 8 + 8x^2 - 9x - x^2 + 11$

$D = -2x^2 - 13x + 7 + 13x - 2x^2 + 7$

17 Supprime les parenthèses puis réduis.

$A = (3x^2 + 8) - (21 + x^2)$

$B = 17x - (5x^2 + 9 - 4x)$

$C = (4x^2 + 7x + 21) - (x^2 + 2x - 13)$

18 Développe et réduis ces expressions en utilisant les bulles pour répondre. Chaque bulle ne doit être utilisée qu'une seule fois dans l'exercice.

$-x^2$; $3x$; $2x^2$; 4 ; $-7x$; $8x$; 2 ; $20x^2$; $-6x$; $3x^2$

$A = 2x(x - 3)$

$B = (5x + 2) \times 4x$

$C = (x + 1)(4 - x)$

$D = (x - 2)(3x - 1)$

19 Développe et réduis ces expressions.

$A = (x + 9)(3 - 2x)$

$B = (3y + 5)(10 + y)$

$C = (z - 2)(3 - z)$

$D = 5(3g + 1)(g - 2)$

20 Développe puis réduis ces expressions.

$A = (a + 6)^2$

$B = (t + 10)^2$

$C = (1 + p)^2$

$D = (x + 1{,}1)^2$

21 Développe puis réduis ces expressions.

$E = (2x + 2)^2$

$F = (3b + 4)^2$

$G = (5 + 4z)^2$

$H = (1{,}5y + 1{,}2)^2$

22 Calcule mentalement.

a. 102^2

b. 51^2

c. $1\,009^2$

d. $1\,000\,001^2$

23 Développe puis réduis ces expressions.

$A = (x - 3)^2$

$B = (y - 7)^2$

$C = (5 - t)^2$

$D = (x - 1{,}5)^2$

24 Développe puis réduis ces expressions.

$E = (2x - 1)^2$

$F = (3p - 5)^2$

$G = (6 - 9w)^2$

$H = (1{,}4x - 1)^2$

25 Calcule mentalement.

a. 99^2

b. 49^2

c. 997^2

d. 499^2

26 Associe les expressions égales.

$(2x + 1)^2$	•	•	$-4x^2 - 2x$
$-2x(2x + 1)$	•	•	$4x^2 - 2x$
$(2x - 1)^2$	•	•	$4x^2 + 4x + 1$
$2x(2x - 1)$	•	•	$4x^2 - 4x + 1$

27 Développe puis réduis ces expressions.

$A = (x + 9)^2$

$B = (y - 3)^2$

$C = (5 - 2t)^2$

$D = (x - 1{,}5)^2$

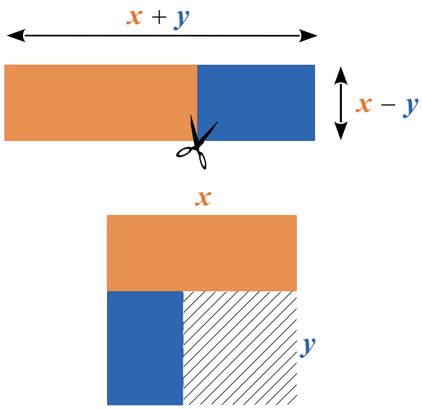
$E = (9x + 9)^2$

$F = (1{,}5p - 2{,}5)^2$

28 Calcule mentalement.

a. $9{,}9^2$ **b.** $100{,}1^2$ **c.** $9{,}99^2$ **d.** $10{,}01^2$

29 On découpe un rectangle comme sur le schéma. Les rectangles bleu et orange sont assemblés pour former une nouvelle figure. x et y sont des nombres positifs, et x est strictement supérieur à y. Traduis ces figures par une égalité. Justifie ta réponse.



30 Développe puis réduis ces expressions.

$A = (x - 2)(x + 2)$

$B = (z + 7)(z - 7)$

$C = (5 - y)(5 + y)$

$D = (x + 2{,}5)(x - 2{,}5)$

31 Développe puis réduis ces expressions.

$E = (3x + 5)(3x - 5)$

$F = (5z - 10)(5z + 10)$

$G = (5 + 4g)(5 - 4g)$

$H = (7x - 3)(7x + 3)$

32 Calcule mentalement.

a. $1\,001 \times 999$

b. $10{,}1 \times 9{,}9$

c. 95×105

d. 49×51

33 Associie les expressions égales.

$(4x + 3)^2$ •	• $16x^2 - 9$
$(4x - 3)^2$ •	• $9x^2 - 16$
$(3x + 4)(3x - 4)$ •	• $16x^2 - 24x + 9$
$(4x + 3)(4x - 3)$ •	• $16x^2 + 24x + 9$

34 Développe puis réduis ces expressions.

$A = (9x - 7)^2$

$B = (x + 9)(11 - 5x)$

$C = (2x - 3)(2x + 3)$

$D = (11 + 8x)^2$

35 Développe puis réduis ces expressions.

$E = (x + 1)^2 + 7x(2 - x)$

$F = (x + 3)(2x - 1) - 3x(2x + 5)$

$G = (4t + 1)(4t - 1) - (3t + 2)^2$

$H = 2(s + 5)(s - 5) + (4s + 3)^2$

36 Recopie et complète les expressions.

a. $(\ldots + 4)^2 = x^2 + \ldots + \ldots$

b. $(y - \ldots)^2 = \ldots - 6y + \ldots$

c. $(\ldots + 6)(\ldots - \ldots) = k^2 - \ldots$

d. $(3x + \ldots)^2 = \ldots + \ldots + 4$

37 Recopie et complète les expressions.

a. $(1 - \ldots)(\ldots + \ldots) = \ldots - 49x^2$

b. $(\ldots - 8)^2 = \ldots - 48x + \ldots$

c. $(\ldots + \ldots)(\ldots - 3) = 100y^2 - \ldots$

38 Julie affirme qu'elle peut comparer les quotients $\dfrac{999\,999}{1\,000\,000}$ et $\dfrac{1\,000\,000}{1\,000\,001}$ sans utiliser de calculatrice et sans poser de multiplication. Comment fait-elle ?

39 QCM

a. Quelle est la forme développée de $(3x + 5)^2$?

R.1	R.2	R.3
$9x^2 + 15x + 25$	$9x^2 + 25$	$9x^2 + 30x + 25$

b. $(2x - 1)^2 =$

R.1	R.2	R.3
$2x^2 - 1$	$4x^2 - 1$	$4x^2 - 4x + 1$

c. $(3x - 2)(3x + 2) =$

R.1	R.2	R.3
$9x^2 - 4$	$9x^2 - 12x + 4$	$9x^2 + 12x + 4$

40 Souligne un facteur commun puis factorise.

$A = 5x + 2x + 10x$

$B = 27x^2 - 27x + 27$

$C = 9x(x - 3) + 9x(10 + 2x)$

$D = (2x + 1)(8 + x) - (3x - 1)(2x + 1)$

41 Fais apparaitre un facteur commun puis factorise chaque expression.

E = $10x^2 - 5x + 15$

F = $4x^2 + 7x$

G = $9x^2(x + 1) + 6x(5 + x)$

H = $(11x - 3)^2 + (11x - 3)(5 + 9x)$

42 Factorise ces expressions.

I = $t^2 + 81 + 18t$

J = $x^2 + 36 + 12x$

K = $9x^2 + 6x + 1$

L = $81 + 16y^2 + 72y$

43 Factorise ces expressions.

M = $t^2 + 14t + 49$

N = $4x^2 - 4x + 1$

O = $25 + 16y^2 - 40y$

P = $100x^2 + 1 - 20x$

44 Factorise ces expressions.

Q = $x^2 - 16$

R = $1 - y^2$

S = $100x^2 - 9$

T = $36 - 81z^2$

45 Factorise ces expressions.

U = $4t^2 - 25$

V = $(t + 3)^2 - 16$

W = $(2x + 1)^2 - 25$

Z = $(3i)^2 - (i + 5)^2$

46 Factorise ces expressions.

A = $36 - 25x^2$

B = $100 + 60x + 9x^2$

C = $2i(i + 1) + 2i(2 + i)$

D = $b^2 - 10b + 25$

47 Factorise ces expressions.

E = $(2 - x)^2 + (2 - x)(9 + x)$

F = $(3 - 2x)(5 + x) - (5 + x)^2$

G = $-(15 - x)^2 - (15 - x)(3 - x)$

48 Factorise ces expressions.

H = $(5x + 1)^2 - 81$

I = $(7d + 2)^2 - (3d + 4)^2$

49 Calcule mentalement.

a. $105^2 - 95^2$

b. $1\,001^2 - 1\,000^2$

c. $2\,008^2 - 8^2$

d. $573^2 - 572^2$

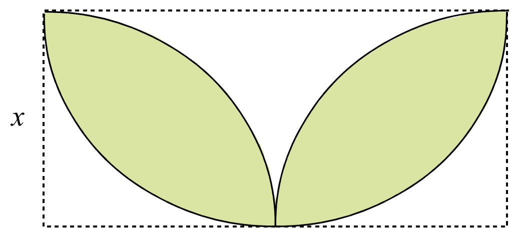
50 On note V = $100\,000\,001^2 - 100\,000\,000^2$.

a. Calcule mentalement V, puis vérifie ton résultat à la calculatrice.

b. Que peux-tu conclure ?

c. Reprends les questions **a** et **b** avec le nombre W = $987\,654\,321^2 - 12\,345\,679^2$.

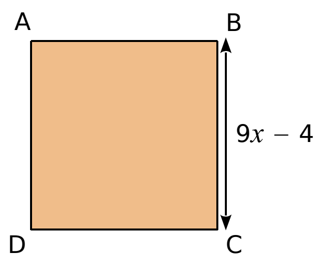
51 ***Aire***



Exprime l'aire coloriée en fonction de x.

52 ***En fonction de...***

a. Exprime l'aire du carré ABCD en fonction de x, puis développe l'expression ainsi obtenue.



b. Calcule l'aire de ce carré lorsque $x = \frac{2}{3}$.

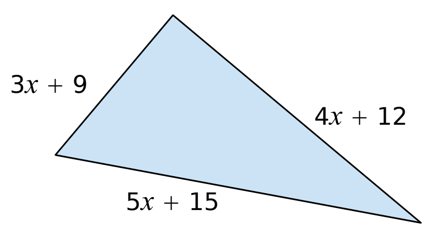
53 n désigne un nombre entier.

On pose A = $(3n + 1)^2 + 16n^2 - 26n + 3$.

a. Développe et réduis A.

b. Montre que A est le carré d'un nombre entier.

54 ***Triangle rectangle***



Montre que ce triangle est toujours rectangle, quel que soit le nombre positif x.

Équations du premier degré

55 Le nombre -5 est-il solution de l'équation $7 - 4x = 13$? Et le nombre 5 ?

56 Le nombre -2 est-il solution de l'équation $4 - 4x = 6 + x$? Et le nombre 0 ?

57 Pour chaque équation ci-dessous, vérifie si les nombres 0 ; 2 et -1 sont solutions ou pas.

a. $2(x + 1) + 5 = 7$

b. $2(x + 1) + 5 = 6 + x$

c. $2(x + 1) + 5 = 3x^2 - x + 1$

d. $2(x + 1) + 5 = (x + 3)(4 - x)$

58 Résous les équations suivantes.

a. $x + 7 = 8$

b. $t - 9 = 3$

c. $y + 15 = 7$

d. $4z = -7$

e. $-z = -8$

f. $7x = 4$

59 Résous les équations suivantes.

a. $3x - 3 = 3$

b. $5z - 10 = 12$

c. $3 - y = 0$

d. $1 + 5x = -29$

e. $2 + 3z = -2$

f. $9 - y = -2{,}3$

60 **TICE Tableur**

On veut tester si l'égalité $4(1 - x) = -2(x + 9)$ est vérifiée pour un nombre entier compris entre 1 et 20.

a. Reproduis la feuille de calcul suivante et complète la colonne A avec les nombres entiers de 1 à 20 (inclus).

	A	B	C
1	x	$4(1 - x)$	$-2(x + 9)$
2	1		

b. Quelles formules peux-tu saisir, puis recopier vers le bas, dans les cellules B2 et C2 ?

c. Pour quelle valeur de x a-t-on $4(1 - x) = -2(x + 9)$?

d. Développe chaque membre de l'équation $4(1 - x) = -2(x + 9)$ puis résous-la. Vérifie que tu trouves le même résultat qu'à la question précédente.

61 Résous les équations suivantes.

a. $2 + 16x = 3 + 15x$

b. $3x - 14 = 9 - 2x$

c. $5x + 6 = 12 + 15x$

d. $5x + 1 = 2x + 19$

e. $8x + 3 = x + 15$

f. $2x + 3 = 6x + 11$

62 Résous les équations suivantes.

a. $5 + 1{,}5t = 3 + 2{,}5t$

b. $3y - 3{,}5 = 9y - 3{,}5$

c. $2{,}5z + 5 = -2{,}5z - 5$

d. $0{,}5t + 1 = 2t + 1{,}5$

e. $8y = y + 1{,}5$

f. $7{,}8i - 8 = 1{,}3i + 2$

63 Résous les équations suivantes.

a. $7(2 - x) = -2x$

b. $6x = 5(3 + x)$

c. $5(1 - x) = -2(x + 2)$

d. $-3(1 + 2x) = 7(x - 5)$

64 Résous les équations suivantes.

a. $5 + 2t = 3 + 2t$

b. $3y - 3 = 2y + y - 3$

c. $5(z + 2) = 5z + 10$

d. $t + 1 = t + 1{,}5$

65 Pour pratiquer le karting sur un circuit, il faut d'abord payer 55 € pour obtenir la carte de membre annuelle. Ensuite, chaque séance d'une demi-heure revient à 16 €.

a. J'envisage de rouler pendant 20 h. Combien devrai-je payer ?

b. On appelle P le prix à payer, en euros, et x le nombre d'heures passées sur le circuit. Exprime P en fonction de x.

c. Calcule la valeur de P pour x valant 5 ; 10 ; puis 100.

d. Cette année, je dispose de 430 € pour faire du karting. Combien de temps pourrai-je passer sur le circuit ?

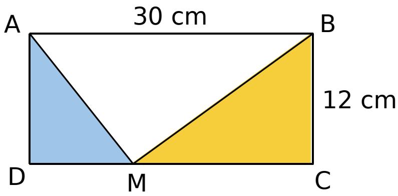
66 La somme de trois nombres entiers naturels, impairs et consécutifs est égale à 495. Quels sont ces trois nombres ?

67 Arthur et Charlotte choisissent un même nombre. Arthur le multiplie par 10, puis soustrait 2 au résultat obtenu. Charlotte le multiplie par 8, et ajoute 7 au résultat obtenu. Ils obtiennent tous deux le même résultat.
Quel nombre Arthur et Charlotte avaient-ils choisi au départ ?

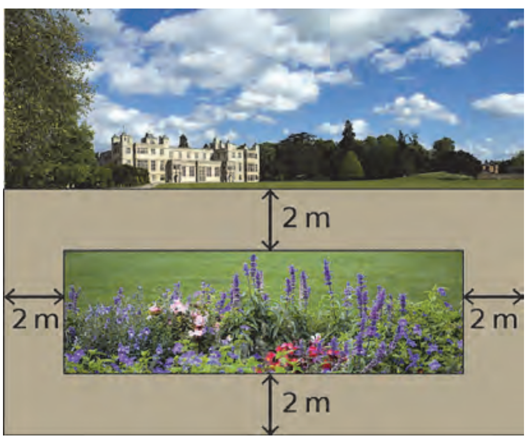
68 Aujourd'hui, Marc a 11 ans et Pierre a 26 ans. Dans combien d'années l'âge de Pierre sera-t-il le double de celui de Marc ?

69 Mon père a 23 ans de plus que moi. Dans 15 ans, il aura le triple de l'âge que j'ai aujourd'hui. Quel est mon âge ?

70 M est un point du segment [DC]. Où doit-on le placer pour que l'aire du triangle ADM soit le tiers de l'aire du triangle BCM ? Justifie.



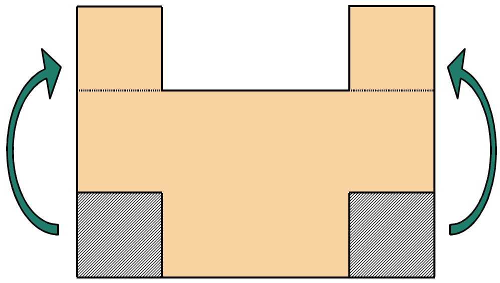
71 Devant le château Pelouse, le parc paysager est rectangulaire : sa longueur est le double de sa largeur. Ce terrain est constitué d'un très beau parterre de fleurs, entouré d'une allée.



a. Sachant que l'aire de l'allée est 368 m², calcule la largeur exacte du terrain.

b. Déduis-en, en m², les aires du terrain et du parterre central.

72 Dans une plaque rectangulaire de 15 cm de long et 12 cm de large, on découpe deux pièces carrées identiques que l'on recolle suivant le plan ci-dessous.



Quelle doit être la mesure du côté de ces carrés pour que le périmètre de la nouvelle plaque soit égal à 70 cm ? Justifie.

73 **QCM**

a. -2 est solution de l'équation...

R.1	R.2	R.3
$2t - 2 = t$	$9t + 15 = -3$	$-2t = -2 - 2$

b. Quelle équation a la même solution que l'équation $-4x + 1 = 2x$?

R.1	R.2	R.3
$6x = -1$	$-2x = -1$	$6x = 1$

c. Quelle est la solution de l'équation $5y - 3 = 1 - 4y$?

R.1	R.2	R.3
$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$	-2

d. Quelle est la solution de l'équation $5(y - 3) = 2(1 - 4y)$?

R.1	R.2	R.3
-1	$\frac{5}{9}$	$\frac{17}{13}$

74 Soient f et g les fonctions définies par $f(x) = 5x + 1$ et $g(x) = -2x - 4$.

a. Détermine les antécédents, par la fonction f, des nombres -7 et 0.

b. Détermine les antécédents, par la fonction g, des nombres -3 et 3.

c. Calcule $f(1)$ et $g(1)$.

d. Le nombre 1 est-il solution de l'équation $f(x) = g(x)$?

e. Résous l'équation $f(x) = g(x)$.

Équations produit

75 **TICE Tableur**

On considère un nombre x. Pour différentes valeurs de x, on cherche à évaluer les expressions ci-dessous et, en particulier, à trouver les valeurs de x qui rendent nulles ces expressions : $B = 3x(3x + 6)(x + 3)$

$C = (10x + 7)(x - 5)(x + 3)$

$D = (x + 3)(4x - 1)(x - 3)$

	A	B	C	D
1	Valeurs de x			
2	– 5			
3	– 4			
...	...			
11	4			
12	5			

a. Programme les formules permettant de calculer B, C et D pour les valeurs entières de x comprises entre – 5 et 5.

b. À partir du tableau, donne des valeurs qui annulent B, C et D.

c. Insère un graphique de type « ligne ». Combien de valeurs de x annulent B, C et D ? On admettra qu'il n'y en a pas d'autre.

d. Pour aider à la recherche de toutes les valeurs annulant C et D, construis un nouveau tableau pour les valeurs de x comprises entre – 1 et 1 avec un pas de 0,1.

e. Donne toutes les valeurs annulant l'expression C.

f. As-tu trouvé toutes celles annulant D ? En construisant un dernier tableau, conclus.

g. En observant attentivement les expressions B, C et D, que remarques-tu sur les valeurs qui annulent chacune d'elles ? Que peux-tu en conclure ?

76 Résous les équations suivantes.

a. $(x + 1)(x - 8) = 0$

b. $(x - 8)(11 + x) = 0$

c. $(2,5 - x)(x + 7,5) = 0$

d. $(7 - x)(x - 7) = 0$

77 Résous les équations suivantes.

a. $(2x - 1)(16 + 4x) = 0$

b. $(5x - 3)(6 + x) = 0$

c. $(11 - 8x)(3x + 7) = 0$

d. $2x(3x + 2)(3x - 1) = 0$

78 Soit $A = (y + 5)(y - 2) - 6(y + 5)$.

a. Développe et réduis l'expression A.

b. Factorise A.

c. Résous l'équation $(y + 5)(y - 8) = 0$.

79 Soit $B = (3x + 4)^2 - 81$.

a. Développe et réduis l'expression B.

b. Factorise B.

c. Calcule B pour $x = -5$, puis pour $x = \frac{5}{3}$.

d. Résous l'équation B = 0.

80 **QCM**

a. Quelles sont les solutions de l'équation $(x + 3)(x - 4) = 0$?

R.1	R.2	R.3
3 et 4	– 3 et 4	– 3 et –4

b. Quelles sont les solutions de l'équation $(2x + 1)(3x - 7) = 0$?

R.1	R.2	R.3
– 0,5 et 2,33	– 0,5 et $\frac{7}{3}$	0,5 et $-\frac{7}{3}$

81 ***Programme de calcul***

- Choisir un nombre.
- Calculer son double augmenté de 1.
- Calculer le carré du résultat.

a. Effectue ce programme pour les nombres 7 ; 2,1 et $\frac{3}{5}$.

b. Est-il possible d'obtenir 0 comme résultat ? Si oui, pour quel(s) nombre(s) de départ?

82 ***Programme de calcul (bis)***

- Choisir un nombre.
- Multiplier le résultat du calcul de son double augmenté de 1 par le résultat du calcul de son triple diminué de 5.

a. Applique ce programme de calcul aux nombres : – 4 ; 5,1 et $\frac{7}{3}$.

b. Quel(s) nombre(s) choisir pour que le résultat obtenu soit égal à zéro ?

83 On dispose d'une plaque métallique rectangulaire de dimensions 20 cm par 15 cm. On veut y découper quatre carrés identiques.

a. Si on découpe des carrés de 2 cm de côté, quelle sera l'aire de la partie restante ?

b. Si on découpe des carrés de 8 cm de côté, que se passera-t-il ?

c. On veut que l'aire de la partie restante soit exactement égale à 251 cm². Quelle longueur de côté doit-on alors choisir ?

d. Est-il possible, en choisissant bien, qu'il ne reste rien après le découpage ?

84 Résous chaque équation.

a. $(5x + 1)(8 - x) = 0$

b. $(3x - 1) + (7 - x) = 0$

c. $(8 + 3x) - (x + 3) = 0$

d. $(3 - 10x)(x + 23) = 0$

e. $6(y + 3) - 2(y - 1) = 0$

85 **Vrai ou Faux**

P.1. Le carré de la somme de deux nombres est égal à la somme des carrés de ces nombres.

P.2. Le carré de la différence de deux nombres est égal à la différence des carrés de ces nombres.

P.3. Le carré du produit de deux nombres est égal au produit des carrés de ces nombres.

P.4. Le carré du double d'un nombre est égal au double du carré de ce nombre.

86 Développe et réduis chaque expression.

$A = (x^2 + 2)^2$ $B = (2x + 1)^2 + (2x - 1)^2 - 8x^2$

$C = 2(3t - 5)^2 - 2(1 - 4t)^2$

$D = (1 + 4y)^2 - (2y + 3)^2 - (1 + 4y)(2y + 3)$

87 Factorise les expressions suivantes.

$E = (2x + 1)^2 + (2x + 1)$

$F = 3(2x - 3)^2 - (2x - 3)$

$G = (x + 4)(3x + 4) - x - 4$

$H = (3x + 7)(2x + 1) + (x - 4)(- 2x - 1)$

88 ***En deux coups de cuiller***

a. Factorise $4x^2 - 9$.

b. Déduis-en une factorisation de l'expression : $J = 4x^2 - 9 + (2x + 3)(x - 1)$.

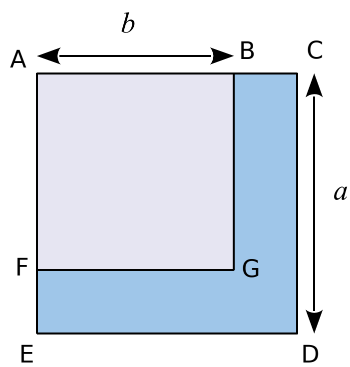
c. Résous l'équation $J = 0$.

89 ***Calcul mental***

a. Développe et réduis l'expression : $K = (x + 15)^2 - (x - 15)^2$.

b. Déduis-en le résultat de $1\,215^2 - 1\,185^2$.

90 ABGF est un carré de côté b.
ACDE est un carré de côté a.



Un agriculteur possède le terrain BCDEFG d'aire 7 200 m².
Un jour, il décide d'aller du point C au point E en passant par B, A et F. Arrivé en F, il a déjà parcouru 120 m.
Quelle distance lui reste-t-il à parcourir pour arriver en E ?

91 On considère l'expression :
$$E = (x - 3)^2 - (x - 1)(x - 2).$$

a. Développe et réduis E.

b. Comment peut-on déduire, sans calculatrice, le résultat de $99\,997^2 - 99\,999 \times 99\,998$?

c. Factorise l'expression :
$$F = (4x + 1)^2 - (4x + 1)(7x - 6).$$

d. Résous l'équation $(4x + 1)(7 - 3x) = 0$.

92 Soit F = $(3x - 5)^2 - (3x - 5)(x + 4)$.

a. Développe et réduis F.

b. Factorise F.

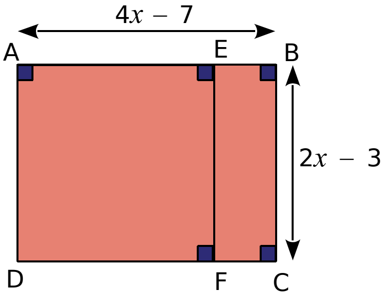
c. Calcule F pour $x = 1$, puis pour $x = 4,5$.

93 On considère l'expression :
D = $(4x - 7)(2x - 3) - (2x - 3)^2$.

a. Développe et réduis D.

b. Factorise D.

c. Sur la figure ci-contre, ABCD est un rectangle et AEFD est un carré.
On suppose que x est un nombre supérieur à 2.



Pour quelle(s) valeur(s) de x ($x > 2$), la différence entre l'aire du rectangle et l'aire du carré est-elle égale à 12 ?

94 On considère la suite des carrés parfaits : 1 ; 4 ; 9 ; 16...

a. Calcule $4 - 1$, puis $9 - 4$, puis $16 - 9$, puis $25 - 16$. Que constates-tu ?

b. Que peux-tu conjecturer à propos de la suite des différences de deux carrés successifs ? Démontre cette propriété.

c. Calcule mentalement $23^2 - 22^2$.

95 TICE Tableur

On donne le programme de calcul suivant.

- Choisir un nombre.
- Prendre son double.
- Ajouter 1.
- Prendre le carré de cette somme.
- Soustraire 25 à ce produit.
- Écrire le résultat.

a. Applique ce programme à 1, puis à 0.

b. En choisissant comme nombre de départ un nombre relatif compris entre -10 et 10, détermine, à l'aide d'un tableur, si ce nombre peut donner 0 par ce programme de calcul.

c. Soit x le nombre de départ. Exprime le résultat du programme de calcul en fonction de x.

d. Pour quels nombres de départ obtient-on un résultat nul ? Détermine ces nombres en résolvant une équation.

96 Pour calculer 6×8, Jérôme a vu son professeur de mathématiques procéder ainsi :

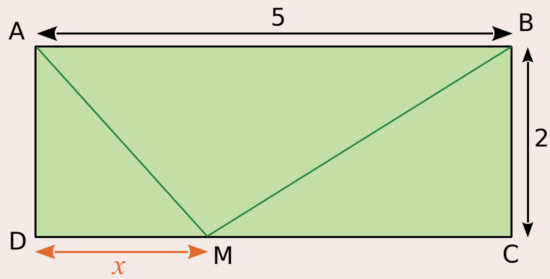
- Pour faire 6 avec la main droite, je lève 1 doigt.
- Pour faire 8 avec la main gauche, je lève 3 doigts.
- J'additionne les doigts levés des deux mains : $1 + 3 = 4$.
- Je multiplie le nombre de doigts baissés à droite par le nombre de doigts baissés à gauche : $4 \times 2 = 8$.
- Le résultat est 48.

a. Vérifie que cette astuce fonctionne pour 7×9 et pour 6×6. (L'éventuelle retenue de la multiplication s'ajoute à la somme des doigts levés.)

b. Démontre cette méthode de calcul de $a \times b$ avec les doigts, pour a et b compris entre 5 et 9.

97 TICE Géométrie Dynamique

On considère un rectangle ABCD tel que :
AB = 5 cm et BC = 2 cm. M est un point qui se déplace sur [DC]. On pose DM = x.



On souhaite déterminer s'il est possible de placer M de manière à ce que le triangle ABM soit rectangle en M.

a. Réalise la figure, M devant être un point du segment [DC]. Affiche la longueur DM et la mesure de l'angle $\widehat{AMB}$. En déplaçant le point M, détermine une (ou des) valeur(s) possible(s) de x.

b. À quelle condition sur les longueurs, le triangle AMB est-il rectangle en M ?

c. Dans le triangle ADM, exprime AM^2 en fonction de x. Puis, dans le triangle BMC, exprime BM^2 en fonction de x.

d. Traduis alors par une équation la condition vue dans **b**, et montre que cette équation peut s'écrire $2x^2 - 10x + 8 = 0$.

e. Développe P = $2(x - 1)(x - 4)$.

f. Déduis-en une nouvelle écriture de l'équation de la question **d**.

Dichotomie

On sait que $1 < \sqrt{3} < 2$, puisque $1 < 3 < 4$. Le but de cette activité est de concevoir et d'utiliser un algorithme permettant de déterminer un encadrement de plus en plus fin du nombre $\sqrt{3}$.

Partie 1

a. Construis un tableau de valeurs et la représentation graphique de la fonction $f : x \longmapsto x^2 - 3$, pour x variant entre 0 et 2.

b. Explique, à l'aide du graphique, pourquoi le nombre 0 admet un antécédent compris entre 0 et 2 par la fonction f. Quelle est la valeur exacte de cet antécédent ?

c. Déduis-en un encadrement plus précis de cet antécédent.

d. Comment savoir si cet antécédent est compris entre 1 et 1,5 ou entre 1,5 et 2 ?

e. À chaque étape, on procède de la même façon, en coupant en deux l'intervalle. Poursuis ce découpage encore quelques étapes. Peux-tu donner une valeur approchée de $\sqrt{3}$ au millième ?

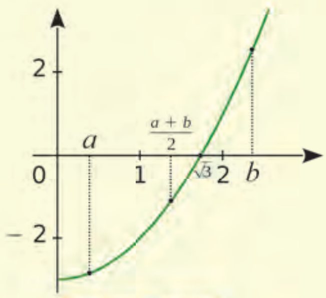
Partie 2

Dans la partie précédente, on a expliqué pourquoi $\sqrt{3}$ était successivement compris entre 1 et 2 ; entre 1,5 et 2 ; entre 1,5 et 1,75...
Supposons qu'à une étape donnée, $\sqrt{3}$ soit compris entre a et b ($a < b$).
Si on a bien suivi la méthode précédente, nécessairement $f(a)$ est négatif et $f(b)$ est positif.

On calcule alors $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$.

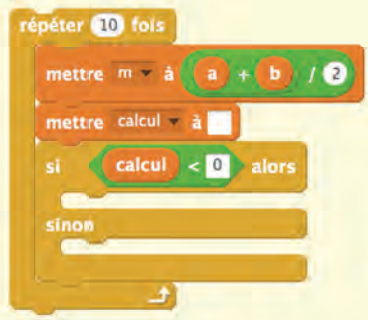
Si $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$ est négatif, alors on en déduit que $\sqrt{3}$ est compris entre $\dfrac{a+b}{2}$ et b.

Si $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$ est positif, alors on en déduit que $\sqrt{3}$ est compris entre a et $\dfrac{a+b}{2}$.



f. Dans SCRATCH, crée les variables a, b et m.
a et b sont les bornes successives des intervalles et m est le milieu de l'intervalle.
À chaque étape, on calcule $f(m)$. Ensuite, on modifie l'intervalle, c'est-à-dire la valeur de a ou de b en fonction du signe de $f(m)$.
Au départ, a est égal à 1 et b est égal à 2.

g. Voici une partie du programme SCRATCH correspondant. Complète-le.



h. La variable *calcul* contient l'image de m par la fonction f. Compare la valeur de m obtenue à la dernière étape avec la valeur de $\sqrt{3}$ donnée par la calculatrice. Quel écart y a-t-il entre ces deux valeurs ?

i. Quelle valeur approchée obtient-on si on répète 20 fois le découpage ? Quelle est la précision de cette valeur approchée ?

Remarque : La méthode de découpage utilisée pour réaliser cet algorithme est appelée méthode par **dichotomie**.

N3

Inéquations

Activités

1 Compris ou pas ?

Cours : 1

Dans ce parc de loisirs, certaines attractions sont réservées à des enfants d'une taille bien précise.

Le bateau fou	Maxi-salto
Réservé aux enfants de moins de 1,40 m	Réservé aux enfants d'au moins 1,40 m

Voltigeur	Super grand huit
Interdit aux enfants de 1,40 m et moins	Interdit aux enfants de plus de 1,40 m

Soit t la taille d'un enfant en mètres.

Pour chaque attraction, écris une inégalité caractérisant la taille d'un enfant autorisé à y participer (par exemple : $t \leqslant 1{,}40$ ou $t > 1{,}40$).

2 En route !

Cours : 2

Pour partir en week-end, Alain a décidé de louer une voiture.
Voici les tarifs proposés par les deux agences de sa ville.

Agence RAVIS : 124 € de location + 30 centimes d'euro par kilomètre parcouru ;

Agence EUROPAUTO : 145 € de location + 25 centimes d'euro par kilomètre parcouru.

a S'il parcourt 100 km, combien lui coutera la location dans chaque agence ? Dans ce cas, quel tarif est le plus avantageux ?

b Et pour 1 000 km ?

TICE Tableur

On souhaite, à l'aide d'un tableur, comparer les tarifs des deux agences, en fonction du nombre de kilomètres parcourus.
Reproduis la feuille de calcul ci-contre.

	A	B	C
1	Nombre de kilomètres	Prix (RAVIS)	Prix (EUROPAUTO)
2	120		

c Quelle formule peux-tu saisir dans la cellule B2 ? Dans la cellule C2 ? Vérifie alors tes réponses aux questions **a** et **b**.

d À partir de combien de kilomètres parcourus le tarif proposé par l'**agence EUROPAUTO** est-il apparemment la plus avantageux ?

Dans la suite de l'activité, on note x le nombre de kilomètres parcourus.

e Exprime, pour chacune des agences, le prix à payer en fonction de x.

f Traduis par une inéquation la proposition : « *Le prix à payer à l'**agence EUROPAUTO** est inférieur ou égal au prix à payer à l'**agence RAVIS**.* »

g Résous cette inéquation. Représente-la graphiquement sur une droite graduée, et repasse en rouge l'ensemble des solutions. Tiens compte des crochets et de la réponse à la question **a**.

h Conseille les clients ci-dessous à l'aide de cette droite graduée.

Client	Jacques	Rosaline	Moussa	Yann	Tatiana
Distance à parcourir	650 km	355 km	450 km	200 km	30 km

1 Inégalité et inéquation

→ 17

A Inégalité

Définitions

- Si le nombre a est **plus petit que** le nombre b, on dit que a est **inférieur** à b. On note $a < b$. (On note $a \leqslant b$ si a et b peuvent être égaux.)
- Si le nombre a est **plus grand que** le nombre b, on dit que a est **supérieur** à b. On note $a > b$. (On note $a \geqslant b$ si a et b peuvent être égaux.)

Exemples : $-7 < -5$ et $\pi > 3$

Propriété 1 On **ne change pas** le sens d'une inégalité **en additionnant** ou **en soustrayant** un même nombre à chacun de ses deux membres.

Exemple : $-7 < -5$ donc $-7 + 2 < -5 + 2$ et $-7 - 2 < -5 - 2$

Propriété 2 On **ne change pas** le sens d'une inégalité **en multipliant** ou **en divisant** ses deux membres par un même nombre **strictement positif**.

Exemple : $\pi > 3$ donc $\pi \times 5 > 3 \times 5$ et $\pi \div 2 > 3 \div 2$

Propriété 3 On **change** le sens d'une inégalité **en multipliant** ou **en divisant** ses deux membres par un même nombre **strictement négatif**.

Exemple : $-7 < -5$ donc $-7 \times (-3) > -5 \times (-3)$ et $-7 \div (-2) > -5 \div (-2)$

B Inéquation

Définitions

- Une **inéquation** est une inégalité comportant une ou plusieurs inconnues.
- Une **solution d'une inéquation** est un nombre pour lequel l'inégalité est vraie.

Exemples :

- -2 est-il solution de $3x + 5 < -2x - 8$?

On calcule séparément chaque membre de l'inéquation en remplaçant x par -2.

$3 \times (-2) + 5 = -6 + 5 = -1$ ⟶ Le membre de gauche a pour valeur -1.

$-2 \times (-2) - 8 = 4 - 8 = -4$ ⟶ Le membre de droite a pour valeur -4.

$-1 > -4$ donc -2 n'est pas solution de l'inéquation $3x + 5 < -2x - 8$. ⟶ On conclut après avoir comparé les deux valeurs trouvées.

- $-2{,}6$ est-il solution de $3x + 5 < -2x - 8$?

On calcule séparément chaque membre de l'inéquation en remplaçant x par $-2{,}6$.

$3 \times (-2{,}6) + 5 = -2{,}8$
$-2 \times (-2{,}6) - 8 = -2{,}8$ ⟶ Les deux valeurs trouvées sont identiques mais l'inégalité est stricte.

$-2{,}6$ n'est pas solution de l'inéquation $3x + 5 < -2x - 8$

2 Résoudre une inéquation

→ 23

A Méthode de résolution

Définition **Résoudre une inéquation**, c'est déterminer, s'il en existe, les nombres qui vérifient l'inégalité.

Exemple 1 : Résous cette inéquation d'inconnue x : $7x - 3 > 2x - 1$.

$7x - 3 - 2x > 2x - 1 - 2x$
$5x - 3 > -1$ → On **soustrait** $2x$ à chaque membre et on réduit.

$5x - 3 + 3 > -1 + 3$
$5x > 2$ → On **ajoute** 3 à chaque membre et on réduit.

$\frac{5x}{5} > \frac{2}{5}$
$x > \frac{2}{5}$ → On **divise** chaque membre **par** 5 qui est strictement positif, donc le sens de l'inégalité ne change pas.

Les solutions sont tous les nombres strictement supérieurs à $\frac{2}{5}$.

Exemple 2 : Résous cette inéquation d'inconnue x : $-3x - 8 \leqslant x - 1$.

$-4x - 8 \leqslant -1$ → On **soustrait** x à chaque membre.

$-4x \leqslant 7$ → On **ajoute 8** à chaque membre.

$x \geqslant -\frac{7}{4}$ → On **divise** chaque membre par -4 qui est strictement négatif, donc on change le sens de l'inégalité.

Les solutions sont tous les nombres supérieurs ou égaux à $-\frac{7}{4}$.

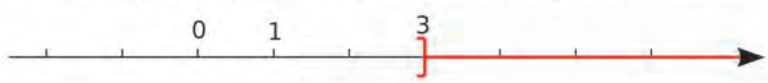
B Représenter les solutions

Définitions

Dans la représentation des solutions sur une droite graduée :
- si le crochet est **tourné vers les solutions,** alors le nombre correspondant **fait partie des solutions** ;
- si le crochet est **tourné vers l'extérieur,** alors le nombre correspondant **ne fait pas partie des solutions**.

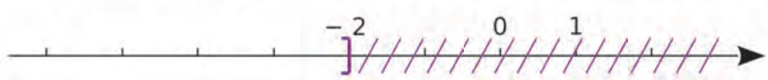
Exemples :

- Sur une droite graduée, représente en rouge les nombres solutions de l'inéquation $x > 3$.



Le crochet n'est pas tourné vers les solutions car le nombre 3 n'est pas solution.

- Sur une droite graduée, hachure les nombres qui ne sont pas solutions de l'inéquation $x \leqslant -2$.



Le crochet est tourné vers les solutions car le nombre -2 est une solution.

Voir aussi les Questions FLASH dans le manuel numérique !

À l'oral !

1 Sachant que $a > -1$, recopie et complète par une inégalité.

a. $a + 2$ ... **c.** $4a$ ... **e.** $-a$ ...

b. $a - 1$ ... **d.** $-2a$ ... **f.** $-a - 2$ ...

2 Chaque nombre suivant est-il solution de l'inéquation $3x + 10 \geqslant 4$?

a. -6 **b.** 0 **c.** -2 **d.** -3

3 -2 est-il solution de l'inéquation...

a. $x > 9$? **c.** $3x - 1 \geqslant -7$?

b. $x + 5 < 4$? **d.** $-2x + 2 > 6$?

4 Associe les inéquations équivalentes.

$5x > 3$ $3x < -5$ $x > 1{,}6$ $-5x + 3 < -5$ $x < -\frac{5}{3}$ $x > 0{,}6$ $x > -\frac{8}{3}$ $3x + 5 > -3$

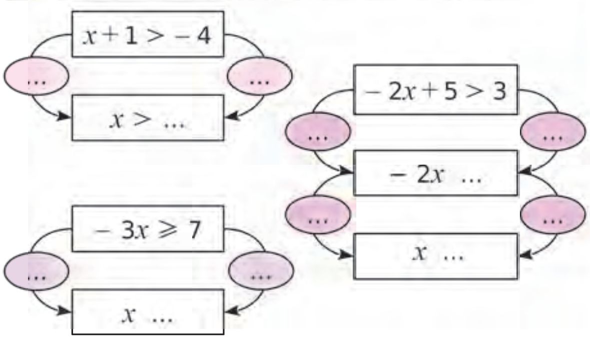
5 Pour chacun des deux membres des inéquations ci-dessous, réalise l'opération demandée.

a. $-3x + 1 > -4$ ➤ Ajouter 4

b. $2x - 5 < 7$ ➤ Multiplier par 3

c. $4 - 8x \geqslant -10$ ➤ Multiplier par -1

6 Complète les schémas ci-dessous.

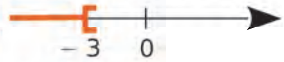


7 Résous les inéquations suivantes.

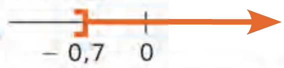
a. $6x > 18$ **c.** $5x - 1 \geqslant 0$

b. $x - 5 < -11$ **d.** $-5x + 7 \leqslant -3$

8 Écris des inéquations dont les solutions sont représentées en orange ci-dessous.

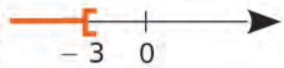
a.


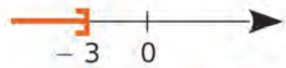
b.

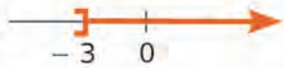

c.


d.


9 Quel schéma ci-dessous représente les solutions de l'inéquation $2x - 2 > 3x + 1$?

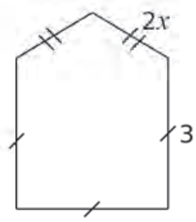
a.


b.


c.


d.


10 Écris l'inéquation permettant de déterminer les valeurs de x, pour lesquelles le périmètre de cette figure est strictement supérieur à 12.



11 **Vrai ou Faux**

P.1. $x < x + 1$ pour tout nombre x.

P.2. Le nombre 1 est solution de l'inéquation $2x - 1 > x$.

P.3. Le nombre 10 n'est pas solution de l'inéquation $-9 + 3x \geqslant x - 5$.

P.4. L'inéquation $2x \leqslant -3$ a les mêmes solutions que l'inéquation $-x \leqslant 1{,}5$.

Inégalités

12 Reproduis et complète le tableau suivant.

Inégalité	En toutes lettres
$a < 3$	a est un nombre strictement inférieur à 3.
$b > -10$	
$1 \geqslant x$	
$s \leqslant 0{,}5$	
	r est un nombre strictement positif.

13 Traduis chaque phrase ci-dessous par une inégalité.

a. Le nombre x est au moins égal à 12.

b. Le nombre x est strictement supérieur à 6.

c. Le nombre x est au plus égal à 7.

d. Le nombre x est inférieur ou égal à 7.

14 Sachant que a et b sont deux nombres tels que $a < b$, compare quand c'est possible.

a. $a + 1$ et $b + 1$

b. $a + 7{,}3$ et $b + 7{,}3$

c. $a - 8$ et $b - 8$

d. $a - 6$ et $b + 6$

e. $b + \pi$ et $a + \pi$

f. $a - 10^4$ et $b - 10^4$

15 Sachant que x, r et s sont des nombres et que $r \leqslant s$, compare les nombres suivants.

a. $5r$ et $5s$

b. $-1{,}3s$ et $-1{,}3r$

c. $3{,}4s$ et $3{,}4r$

d. $s + 2\pi$ et $r + 2\pi$

e. $r + x$ et $s + x$

f. $-9s$ et $-9r$

16 Sachant que $a < 3$, recopie et complète les inégalités.

a. $a + 3$ ...

b. $a - 3$ ...

c. $3a$ ...

d. $-3a$ ...

e. $-a$ ...

f. $-a - 1$ ...

g. $2a + 2$ ...

h. $3a - \pi$ ...

i. $-3a + 3$ ...

17 Sachant que $3{,}14 < \pi < 3{,}15$...

a. encadre le nombre -2π ;

b. encadre le nombre $-3\pi + 2$.

18 **QCM**

a. Si $a < 3$, alors on est sûr que...

R.1	R.2	R.3
$-2a < -6$	$-2a > 6$	$-2a > -6$

b. Quel nombre est solution de l'inéquation $2x + 7 \leqslant 3x + 5$?

R.1	R.2	R.3
0	3	-1

c. 3 est solution de l'inéquation...

R.1	R.2	R.3
$3x + 7 < x - 3$	$2x - 5 \geqslant 1$	$4x - 4 < x + 1$

19 Reproduis et complète le tableau suivant.

Inéquation	Les solutions sont tous les...
$x < 3$	nombres strictement inférieurs à 3.
	nombres négatifs ou nuls.
$x \geqslant -4$	
$0 < x$	

20 ***Recherche de solutions***

a. Parmi les nombres -2 ; 0 et 2, quelles sont les solutions de l'inéquation $5x \leqslant -10$?

b. Le nombre 3 est-il solution de l'inéquation $x + 1 > 0$? Et le nombre -1 ?

c. Le nombre -2 est-il solution de l'inéquation $2x \geqslant 0$? Et le nombre 0 ?

21 **TICE Tableur**

On veut savoir si l'inéquation $-2x + 1 > -31$ a des solutions entières entre 1 et 20 (inclus).

a. Reproduis la feuille de calcul suivante avec, dans la colonne A, les nombres entiers de 1 à 20.

	A	B	C
1	x	$-2x + 1$	
2	1		

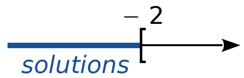
b. Pour compléter la colonne B, choisis parmi les propositions suivantes la formule à saisir en B2.

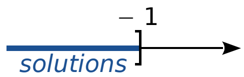
=−2*x+1	=−2*A2+1	=−2*1+1

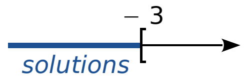
c. Pour quelles valeurs entières de x l'égalité $-2x + 1 > -31$ est-elle vérifiée ?

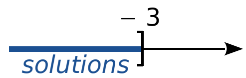
Résoudre une inéquation

22 Indique, dans chaque cas ci-dessous, si le nombre -3 fait partie ou non des solutions représentées sur l'axe.

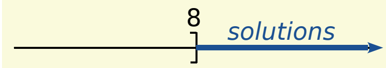
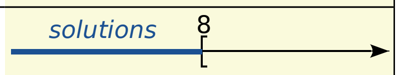
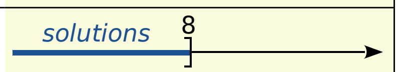
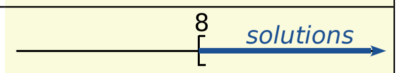
a. 

b. 

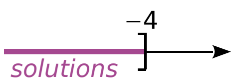
c. 

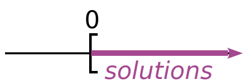
d. 

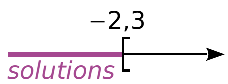
23 Associe l'inéquation à ses solutions.

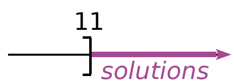
$x \geqslant 8$ •	• 
$x \leqslant 8$ •	• 
$x > 8$ •	• 
$x < 8$ •	• 

24 Écris, dans chaque cas ci-dessous, une inéquation dont les solutions sont représentées.

a. 

b. 

c. 

d. 

25 Représente sur un axe gradué les solutions des inéquations ci-dessous. Hachure la partie qui ne convient pas.

a. $x > -2$

b. $x \leqslant \dfrac{1}{3}$

c. $x \geqslant \pi$

d. $x < -1{,}7$

26 Représente sur un axe gradué les solutions des inéquations ci-dessous. Colorie en vert la partie qui convient.

a. $20 \geqslant x$

b. $0 < x$

c. $-1 > x$

d. $-3 \geqslant x$

27 Résous chaque inéquation. Représente les solutions sur un axe gradué en coloriant la partie qui convient.

a. $x + 7 < 12$

b. $5 + x \leqslant -9$

c. $t - 7 > 0$

d. $y + 1 \geqslant 1{,}5$

e. $10 + x > -20$

f. $t - 51 < -30$

28 ***Passage à l'opposé***

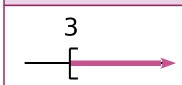
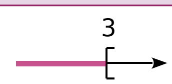
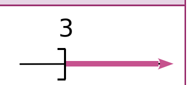
a. Soient a et x deux nombres quelconques. Que peux-tu dire de x, si $-x > a$?

b. Résous alors les inéquations suivantes.

- $-x \geqslant 7$
- $-x < -3$
- $-x > -1$
- $-x \leqslant \dfrac{2}{5}$

29 **QCM**

a. L'ensemble des nombres strictement supérieurs à 3 est représenté par...

R.1	R.2	R.3
		

b. L'inéquation $3x + 2 \leqslant 2x + 1$ a exactement les mêmes solutions que l'inéquation...

R.1	R.2	R.3
$3x \leqslant 2x - 1$	$2x + 1 \leqslant 3x + 2$	$x \leqslant 1$

c. L'inéquation $2x + 5 \leqslant 3x + 6$ admet pour solution...

R.1	R.2	R.3
0	-2	-5

30 Résous chaque inéquation. Représente les solutions sur un axe gradué, en coloriant la partie qui convient.

a. $3 \leqslant -3 + x$

b. $-10 \leqslant x + 22$

c. $-x + 8 < 0$

d. $4 - x \leqslant -1$

31 Même énoncé que l'exercice précédent.

a. $3x \leqslant 12$

b. $7x > -14$

c. $-10x < 5$

d. $-4x \leqslant -20$

32 Salomé a rédigé la solution suivante.

$5x \leqslant 7x - 2$

$5x - 7x \leqslant 7x - 7x - 2$

$-2x \leqslant -2$

$x \leqslant 1$

Les solutions de l'inéquation sont les nombres inférieurs ou égaux à 1.

Est-ce juste ? Justifie ta réponse et donne la bonne résolution le cas échéant.

33 Associe chaque inéquation à ses solutions.

$5x \leqslant -25$	•		•	$x \leqslant 5$
$5x \leqslant 25$	•		•	$x \leqslant -5$
$-5x \leqslant -25$	•		•	$x \geqslant -5$
$-5x \leqslant 25$	•		•	$x \geqslant 5$

34 Résous chaque inéquation. Représente les solutions sur un axe gradué, en coloriant la partie qui convient.

a. $4x - 3 > 6$

b. $3x + 2 \leqslant -7$

c. $-5x + 10 < 12$

d. $-6x + 11 \geqslant 7$

35 Même énoncé que l'exercice précédent.

a. $x - 1 < 5 - 5x$

b. $4x + 3 \leqslant x - 2$

c. $-x + 40 > 10 + x$

d. $-6x + 11 \geqslant 4x$

36 Même énoncé que l'exercice précédent.

a. $2(x + 5) > (x + 3) - (x - 1)$

b. $4 - (2x - 1) \leqslant 3(4x + 1)$

c. $5 - 2(x + 3) \geqslant 2(x + 1) - 3(x - 2)$

d. $\frac{3}{14}x - 1 < \frac{5}{7}$

e. $\frac{1}{4} - x > -\frac{5}{12}$

37 Résous les inéquations suivantes.

a. $5x \leqslant 5x - 2$

b. $5x \leqslant 5x + 2$

c. $3x + 9 \geqslant 9 + 3x$

38 Soit l'inéquation $-3(x - 1) - 6 \geqslant 0$.

a. Le nombre -2 est-il solution de l'inéquation ? Justifie.

b. Résous l'inéquation. Représente les solutions sur un axe (hachure la partie de l'axe qui ne convient pas).

39 ***Quelle inéquation ?***

a. Écris une inéquation dont -5 est solution.

b. Écris une inéquation dont 0 et 4 sont solutions.

c. Écris une inéquation dont -1 est solution, mais pas -2.

40 Après avoir ajouté 5 au triple d'un nombre, on obtient un nombre négatif. Que peux-tu dire du nombre choisi au départ ?

41 Sonia a eu 11 notes au cours du trimestre. Sa moyenne est actuellement de 13,7 sur 20. Quelle note doit-elle obtenir au minimum à son prochain devoir, pour que sa moyenne devienne supérieure ou égale à 14 ?

42 Un cinéma propose deux tarifs.

Tarif 1 : 7,50 € la place.

Tarif 2 : 5,25 € la place sur présentation d'une carte d'abonnement de 27 €, valable un an.

a. On désigne par x le nombre de places qu'un spectateur achète au cours d'une année.
On note P_1 le prix payé avec le tarif 1, et P_2 le prix payé avec le tarif 2 (sur une année).
Exprime P_1 et P_2 en fonction de x.

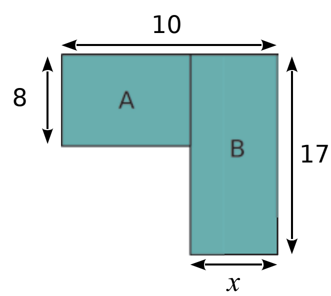
b. À partir de combien de places a-t-on intérêt à s'abonner ?

43 Pour transporter du matériel, la société JPB souhaite comparer les tarifs de deux entreprises : l'entreprise « Vitlivré » propose une somme de 3,20 € par kilomètre parcouru, tandis que l'entreprise « Rapido » propose un forfait de 180 €, puis une somme de 2 € par kilomètre parcouru.

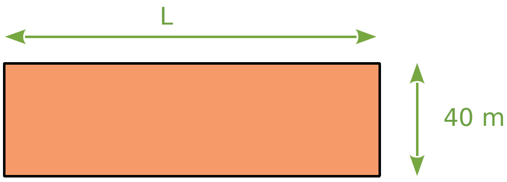
a. Quelle entreprise faut-il choisir pour un transport de 100 kilomètres ?

b. À partir de quel kilométrage l'entreprise « Rapido » est-elle la plus intéressante ?

44 Pour quelles valeurs de x, le périmètre du rectangle A est-il supérieur à celui du rectangle B ?



45 ***Longueur d'un terrain***



Le périmètre du terrain rectangulaire ci-dessus est compris entre 286 m et 288 m.

Détermine un encadrement de la longueur de ce terrain.

46 Le prix d'un cahier est compris entre 1,40 € et 3 €, et celui d'un paquet de feuilles entre 3 € et 4,50 €. Pour la rentrée, Aline a besoin de cinq cahiers et de quatre paquets de feuilles.

a. Donne un encadrement du prix des cahiers.

b. Donne un encadrement du prix des feuilles.

c. Déduis-en un encadrement du cout des fournitures pour Aline.

47 La taille d'un bébé à la naissance est comprise entre 40 et 55 cm. La plupart des enfants grandissent de 13 à 17 cm par an les trois premières années.

Détermine un encadrement de la taille en cm d'un enfant de 3 ans.

48 Un cultivateur de céréales exploite un pré rectangulaire de 80 m de long. Il doit décider de la largeur x, exprimée en mètres, qu'il affectera à la culture des petits pois (cette culture prendra toute la longueur du champ).
Il souhaite que le périmètre de cette parcelle soit inférieur à 240 m. En même temps, il voudrait que son aire soit supérieure à 3 000 m^2.

a. Traduis ces deux informations par deux inéquations.

b. Résous ces inéquations et indique les valeurs possibles de la largeur x du pré.

49 Résous les inéquations ci-dessous et représente les solutions sur un axe gradué, en coloriant en rouge les solutions.

a. $\frac{3}{4}x - \frac{1}{2} < 5 - x$

b. $-1 - \frac{1}{3}(2x + 13) \geqslant \frac{5}{6}(x + 1) - \frac{1}{6}(5x - 2)$

50 Trouve un encadrement de x, sachant que $3 \leqslant -3 + 2x \leqslant 7$.

51 Représente sur une droite graduée les valeurs possibles pour x, sachant que : $-5 \leqslant -3x + 2 \leqslant 6$.

À quel(s) nombre(s) entier(s) relatif(s) x peut-il être égal ?

52 Le fournisseur d'électricité Vivelec propose un abonnement de six mois à 80 €, avec un prix du kWh fixé à 0,15 €.
Un concurrent, Energo, propose un abonnement de 130 € pour la même durée, dans lequel le kWh coute 0,14 € en heures pleines et 0,07 € en heures creuses (de 23 h 30 à 7 h 30).

a. Calcule le montant de la facture annuelle que Vivelec envoie à une famille consommant 3 600 kWh/an.

b. Combien paierait cette famille si elle était cliente chez Energo, sachant que 40 % de sa consommation est réalisée en heures creuses.

c. Quel fournisseur est le plus intéressant pour cette famille, en fonction de sa consommation annuelle ?

53 **TICE Tableur**

L'inéquation $x^2 - 8x - 1\,353 < 0$ a des solutions entières comprises entre -100 et 100.

a. Trouve toutes ces solutions à l'aide d'un tableur.

b. Selon toi, existe-t-il d'autres solutions entières pour cette inéquation ?

54 **Vrai ou Faux**

P.1. L'inéquation $x + 3 > x + 2$ n'a pas de solution.

P.2. L'inéquation $x^2 < -2$ n'a aucune solution.

P.3. Si un nombre est solution d'une inéquation, son opposé est une autre solution de l'inéquation.

P.4. Tout nombre est solution de l'inéquation $2x \geqslant x$.

Exercices Synthèse

Inéquation produit

On souhaite résoudre l'inéquation suivante : $(-2x + 3)(2x + 4) > 0$.

a. Résous l'équation $(-2x + 3)(2x + 4) = 0$.

b. À quelle condition le produit de deux nombres est-il strictement positif ? Quel doit être le signe des expressions $-2x + 3$ et $2x + 4$ pour que leur produit soit positif ?

c. 0 ; 3 et -3 sont-ils solutions de l'inéquation $(-2x + 3)(2x + 4) > 0$?

d. Résous alors l'inéquation $-2x + 3 > 0$. Représente ses solutions sur un axe gradué.

e. Déduis-en les valeurs de x pour lesquelles l'expression $-2x + 3$ est négative.

f. On s'intéresse au signe de l'expression $-2x + 3$, en fonction de la valeur de x. Écris une phrase qui réponde à cette question.

g. On consigne les informations de la question précédente dans un tableau appelé « tableau de signes ».

x		...	
Signe de $-2x + 3$	+		−

Reproduis puis complète le tableau.

h. Vérifie que le tableau est cohérent pour la valeur $x = 0$.

i. Reprends les questions de **d** à **g** pour l'expression $2x + 4$ et complète le tableau.

x		...	
Signe de $2x + 4$	...		...

j. Consigne dans un même tableau toutes les informations précédentes.

x		...		...	
Signe de $-2x + 3$	...		...		...
Signe de $2x + 4$	...		...		...
Signe de $(-2x + 3)(2x + 4)$	...		...		...

k. Vérifie que tes réponses à la question **c** sont cohérentes avec ce tableau.

l. Résous l'inéquation $(-2x + 3)(2x + 4) > 0$ et représente ses solutions sur un axe gradué, en coloriant en rouge les solutions.

m. Résous l'inéquation $(-2x + 3)(2x + 4) < 0$.

G1

Théorème de Thalès

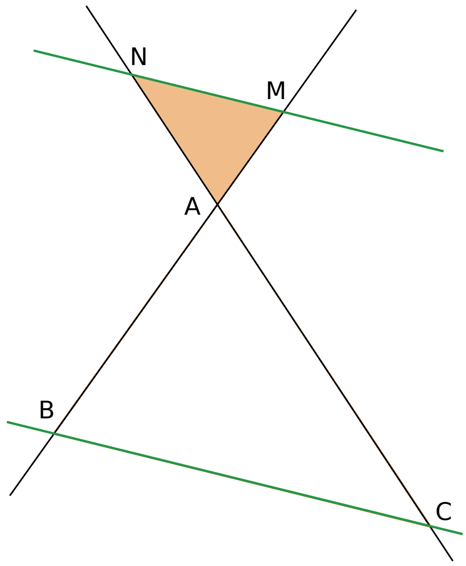
Activités

1 À vos mesures !

Cours : 1

a Trace un triangle ABC.

- Place un point M sur la droite (AB), n'appartenant pas à la demi-droite [AB).
- Construis la parallèle à la droite (BC), passant par M. Elle coupe la droite (AC) en N.



b Mesure les segments AN, AM, AB, AC, MN et BC.

c Compare les quotients $\frac{AB}{AM}$, $\frac{AC}{AN}$ et $\frac{BC}{MN}$.

d Construis une figure similaire avec d'autres dimensions. Calcule à nouveau les quotients de la question **c**.
Que peux-tu conjecturer ?

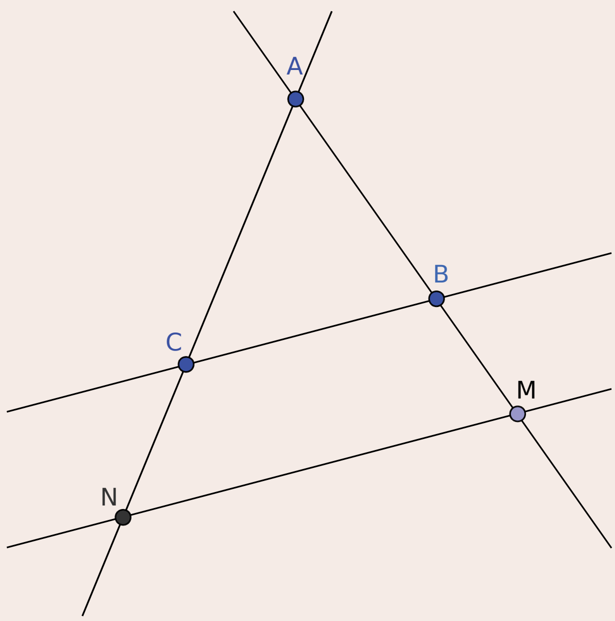
2 Un théorème dynamique !

Cours : 1

TICE Géométrie Dynamique

a À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, effectue la construction suivante.

- Place trois points distincts A, B et C non alignés.
- Trace les droites (AB), (BC) et (CA).
- Place un point M sur la droite (AB), puis construis la droite parallèle à la droite (BC), passant par le point M. Appelle N le point d'intersection de cette droite avec la droite (AC).



b Affiche les rapports $\frac{AB}{AM}$, $\frac{AC}{AN}$ et $\frac{BC}{MN}$. Déplace les points A, B ou C. Que constates-tu ?

c Déplace le point M sur la droite (AB) de sorte qu'il n'appartienne pas au segment [AB]. Quelles sont les possibilités ? La constatation faite à la question **b** est-elle toujours vraie ?

d Même question si le point M appartient au segment [AB].

3 Réciproque

Cours : 2

On suppose que :

- d'une part, les points O, M et A sont alignés ;
- d'autre part, les points O, N et B sont alignés dans le même ordre ;
- $\frac{OM}{OA} = \frac{ON}{OB}$.

On appelle K le point d'intersection de (OB) et de la parallèle à (AB) passant par M.

a Si M appartient à [OA], où se trouve le point K ? Fais un dessin.
Et si M appartient à (OA) mais pas à [OA] ? Fais un dessin.

b Dans quelle configuration peux-tu appliquer le théorème de Thalès ?
Écris alors les égalités de quotients.

c Qu'en déduis-tu pour les rapports $\frac{ON}{OB}$ et $\frac{OK}{OB}$? Justifie.

d Que peux-tu conclure pour les points K et N ?

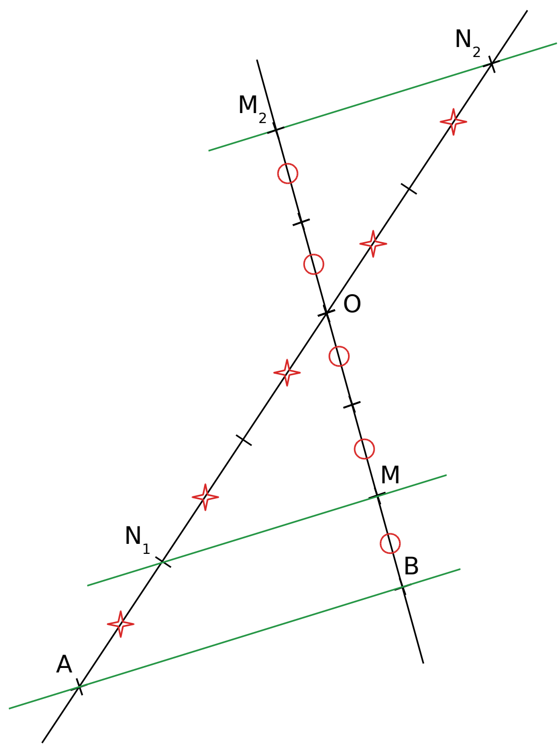
e Que peux-tu dire alors des droites (MN) et (AB) ?

f Conclus.

4 L'égalité de rapports ne suffit pas toujours...

Cours : 2

On considère la figure ci-contre.



a Que valent les rapports $\frac{OM}{OB}$, $\frac{ON_1}{OA}$ et $\frac{ON_2}{OA}$?
Qu'en déduis-tu ?

b Que dire des droites (MN_1) et (AB) ?
Justifie.

c Que dire des droites (MN_2) et (AB) ?

d Comment comprends-tu le titre de cette activité ?

Cours

1 Le théorème direct

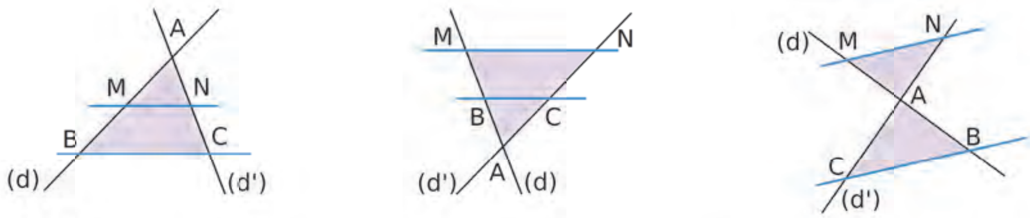
→ 9 19 34

A Théorème de Thalès

Théorème Soient deux droites (d) et (d') sécantes en A.
B et M sont deux points de (d) distincts de A.
C et N sont deux points de (d') distincts de A.

Si les droites (BC) et (MN) sont **parallèles**, alors $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$.

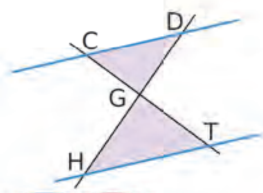
Trois configurations illustrent ce théorème :



Remarque :
Les longueurs des côtés du triangle AMN sont proportionnelles à celles des côtés du triangle ABC.

B Calculs de longueurs

Exemple 1 :
La figure ci-contre est composée de quatre droites.
Les droites bleues sont parallèles.
DG = 25 mm ; GH = 45 mm ; CG = 20 mm et HT = 27 mm.
Les droites (DH) et (CT) sont sécantes en G.
Les droites (CD) et (HT) sont parallèles.

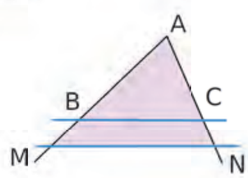


D'après le théorème de Thalès, on a donc $\frac{GC}{GT} = \frac{GD}{GH} = \frac{CD}{HT}$, soit $\frac{20}{GT} = \frac{25}{45} = \frac{CD}{27}$

Calcul de GT : 25 × GT = 45 × 20.
$GT = \frac{45 \times 20}{25}$
donc GT = 36 mm.

Calcul de CD : 25 × 27 = 45 × CD.
$CD = \frac{25 \times 27}{45}$
donc CD = 15 mm.

Exemple 2 :
La figure ci-contre est composée de quatre droites.
Les droites bleues sont parallèles.
AB = 2 cm, AC = 3 cm, BC = 4 cm et AM = 5 cm.
Dans le triangle AMN : B appartient à [AM],
C appartient à [AN] et (BC) est parallèle à (MN).



D'après le théorème de Thalès, le tableau suivant est un tableau de proportionnalité.

Longueur des côtés du triangle ABC	AC = 3 cm	AB = 2 cm	BC = 4 cm
Longueur des côtés du triangle AMN	AN = 2,5 × 3 cm	AM = 5 cm	MN = 2,5 × 4 cm

× 2,5

Ainsi, on obtient : AN = 7,5 cm et MN = 10 cm.

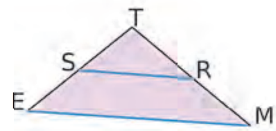
Remarque : Le triangle AMN est un agrandissement du triangle ABC, de rapport 2,5.

C Démontrer que deux droites ne sont pas parallèles

Théorème Soient deux droites (d) et (d') sécantes en A.
B et M sont deux points de (d) distincts de A.
C et N sont deux points de (d') distincts de A.

Si $\frac{AM}{AB} \neq \frac{AN}{AC}$, alors les droites (BC) et (MN) **ne sont pas parallèles**.

Exemple :



Ci-contre, les droites (ES) et (MR) sont sécantes en T.
TR = 11 cm ; TS = 8 cm ; TM = 15 cm et TE = 10 cm.

D'une part, $\frac{TR}{TM} = \frac{11}{15} = \frac{22}{30}$. D'autre part, $\frac{TS}{TE} = \frac{8}{10} = \frac{24}{30}$.

On constate que $\frac{TR}{TM} \neq \frac{TS}{TE}$.

Or, si les droites (RS) et (ME) étaient parallèles, d'après le théorème de Thalès, il y aurait égalité.
Comme ce n'est pas le cas, les droites (RS) et (ME) ne sont pas parallèles.

2 Le théorème réciproque

→ 42 49

A Réciproque du théorème de Thalès

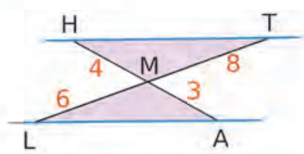
Théorème Soient (d) et (d') deux droites sécantes en A.
B et M sont deux points de (d) distincts de A.
C et N sont deux points de (d') distincts de A.

Si les points A, B, M d'une part et les points A, C, N d'autre part sont alignés dans le même ordre,
et si $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$, alors les droites (BC) et (MN) sont **parallèles**.

Remarque :
Attention, il ne suffit pas de vérifier l'égalité des rapports : il faut aussi s'assurer que les points sont bien placés dans le même ordre.

B Démontrer que deux droites sont parallèles

Exemple :
Ci-contre, les droites (HA) et (TL) sont sécantes en M.



D'une part, $\frac{MH}{MA} = \frac{4}{3}$. D'autre part, $\frac{MT}{ML} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$.

On constate que $\frac{MH}{MA} = \frac{MT}{ML}$.

De plus, les points A, M, H d'une part et les points L, M, T d'autre part sont alignés dans le même ordre. Donc, d'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (AL) et (HT) sont parallèles.

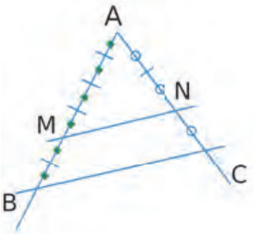
Exercices

À l'oral !

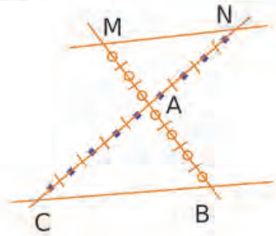
Voir aussi les *Questions FLASH* dans le manuel numérique !

1 Dans chaque cas ci-dessous, exprime le rapport $\frac{AM}{AB}$ et le rapport $\frac{AN}{AC}$.

a.



b.

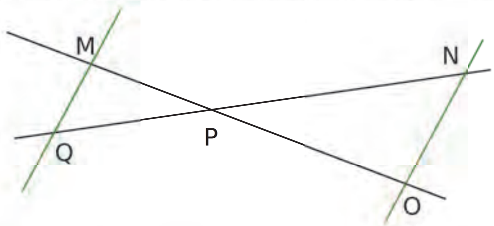


2 Dans chacun des cas suivants, calcule la longueur manquante.

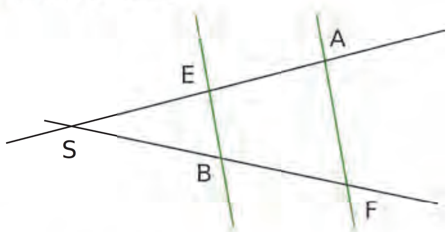
a. $\frac{3}{5} = \frac{KM}{15}$

b. $\frac{1,6}{3,6} = \frac{4}{9} = \frac{UN}{5,4}$

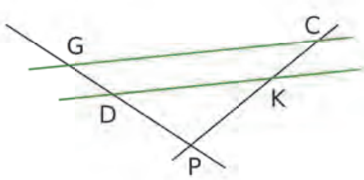
3 Applique le théorème de Thalès pour la configuration ci-dessous : elle est composée de quatre droites, les deux vertes étant parallèles.



4 Même énoncé.

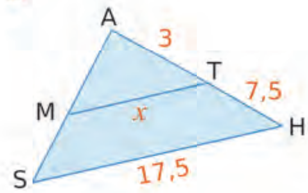


5 Même énoncé.



6 Calcule x et y.

a.

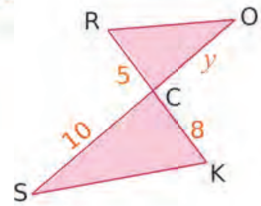


Les points A, M et S sont alignés.

Les points A, T et H sont alignés.

(MT) // (SH)

b.



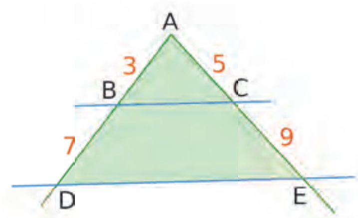
Les points R, C et K sont alignés.

Les points O, C et S sont alignés.

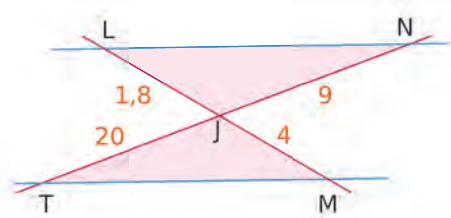
(RO) // (SK)

7 Dans chaque cas ci-dessous, quatre droites sont tracées. Détermine si les droites bleues sont parallèles ou non (attention, les figures ne sont pas à l'échelle).

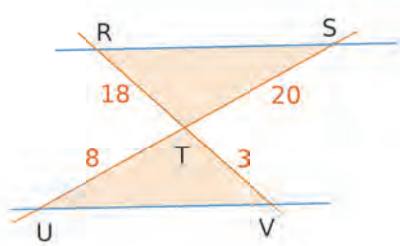
a.



b.

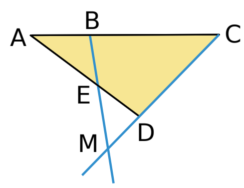


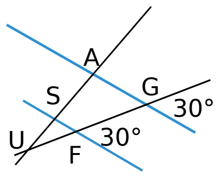
c.

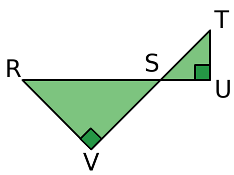


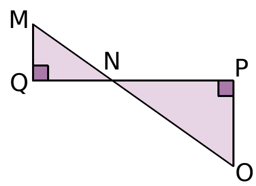
Théorème de Thalès

8 Peux-tu appliquer le théorème de Thalès dans les figures ci-dessous ? Justifie ta réponse.

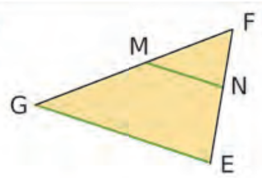
a.


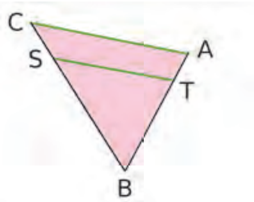
b.


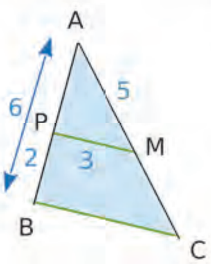
c.


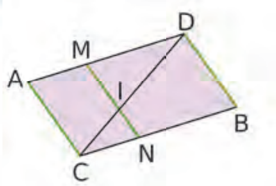
d.


9 Écris tous les rapports de longueurs égaux, dans chacun des cas suivants. Les droites vertes sont parallèles.

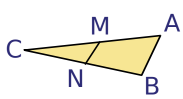
a.


b.


c.


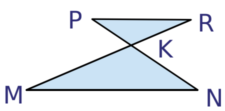
d.


10 **QCM**

a.


M ∈ [AC],
N ∈ [BC] et
(MN) // (AB), donc...

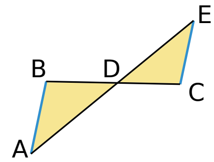
R.1	R.2	R.3
$\frac{AM}{AC}=\frac{BN}{BC}=\frac{MN}{AB}$	$\frac{CM}{CN}=\frac{CA}{CB}=\frac{MN}{AB}$	$\frac{CM}{CA}=\frac{CN}{CB}=\frac{MN}{AB}$

b.


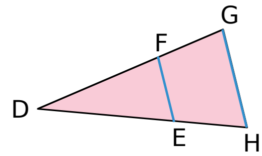
(RM) et (PN) sont sécantes en K et (PR) // (MN), donc...

R.1	R.2	R.3
$\frac{KN}{KP}=\frac{KM}{KR}=\frac{MN}{PR}$	$\frac{KN}{KP}=\frac{KR}{KM}=\frac{NR}{PM}$	$\frac{KN}{KP}=\frac{KM}{KR}=\frac{PR}{MN}$

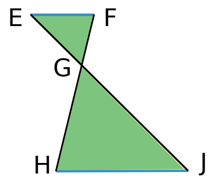
11 Dans chacun des cas suivants, écris tous les rapports de longueurs égaux. Les droites représentées en bleu sont parallèles. Tu préciseras celles que tu as utilisées.

a.


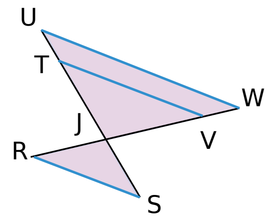
D ∈ [BC] et D ∈ [AE].

b.


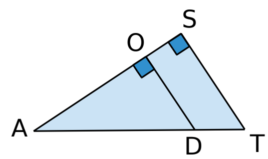
F ∈ [DG] et E ∈ [DH].

c.


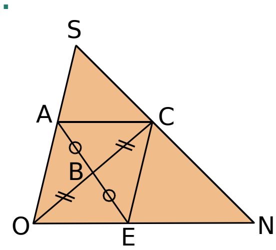
G ∈ [FH] et G ∈ [EJ].

d.


U, T, J et S alignés ;
R, J, V et W alignés.

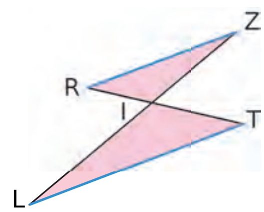
e.


O ∈ [AS] et D ∈ [AT].

f.


A ∈ [OS] et E ∈ [ON].

12 Les points L, I, Z sont alignés et les points R, I, T également.
Les droites (RZ) et (LT) sont parallèles.
On donne : RZ = 5 cm ;
RI = 2 cm et IT = 3 cm.

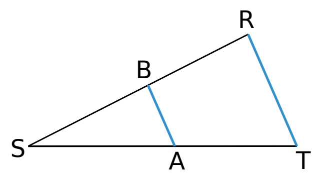


a. Reproduis cette figure à main levée et reportes-y les données de l'énoncé.

b. Écris les rapports de longueurs égaux.

c. Quelle(s) longueur(s) pourrais-tu calculer ?

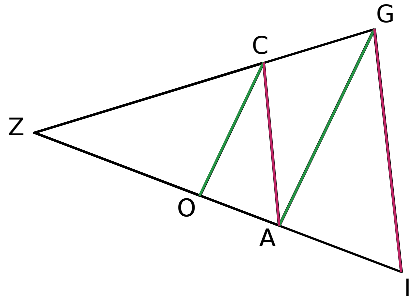
13 Les points S, B, R sont alignés et les points S, A, T également.
Les droites (AB) et (TR) sont parallèles.
On donne : SA = 4 cm ;
ST = 15 cm ;
AB = 2,4 cm
et SR = 7,5 cm.



a. Reporte les données sur un croquis.

b. Quelles longueurs peut-on calculer ?

14 Ci-dessous, les droites représentées en vert et en violet sont parallèles deux à deux.
Les points Z, C, G sont alignés et les points Z, O, A et I également.



a. Décris les deux configurations de Thalès présentes sur cette figure.

b. Écris tous les rapports de longueurs égaux à $\frac{ZC}{ZG}$. Tu préciseras quelles droites parallèles tu as utilisées.

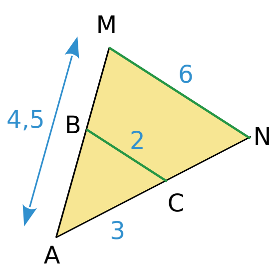
15 Construis le triangle OAB tel que : OA = 6 cm ; OB = 9 cm et AB = 4,5 cm.
Place sur [OA] le point E tel que OE = 5 cm.
La parallèle à la droite (AB), passant par E, coupe (OB) en F.

a. Trace en couleur les droites parallèles. Écris les égalités des rapports de longueurs.

b. Calcule EF et OF.

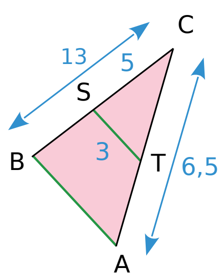
16 Dans chacun des cas suivants, les droites vertes sont parallèles.

a. Calcule AN et AB.



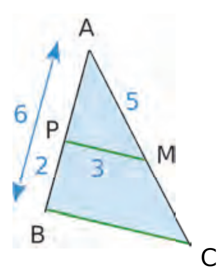
B ∈ [AM] et C ∈ [AN].

b. Calcule CT et AB.



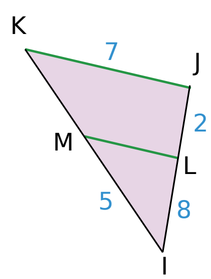
S ∈ [BC] et T ∈ [AC].

c. Calcule AC et BC.



P ∈ [AB] et M ∈ [AC].

d. Calcule IK, MK et LM.



M ∈ [IK] et L ∈ [IJ].

17 Construis le triangle NAF tel que NA = 5,6 cm ; FA = 4,2 cm et $\widehat{NAF}$ = 70°.

Place sur [NA] le point R tel que AR = 8 cm.
La parallèle à la droite (NF) passant par R coupe (FA) en T.

a. Trace en couleur les droites parallèles. Écris les rapports de longueurs égaux.

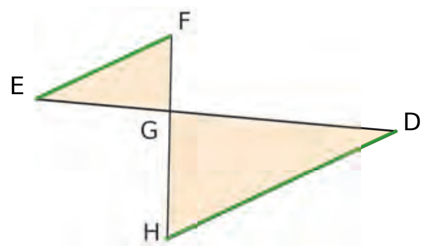
b. Calcule la longueur AT. Vérifie sur ta figure.

18 Un triangle SEL est tel que SE = 6 cm et SL = 3 cm. Le point I est le point de [LS] tel que SI = 5,1 cm. La parallèle à la droite (EL), passant par I, coupe (ES) en X. On a alors IX = 6,8 cm.

a. Trace une figure à main levée. Code la figure avec les données de l'énoncé.

b. Calcule les longueurs SX et EL.

19 Les points F, G, H sont alignés et les points D, G, E également. Les droites en vert sont parallèles.



On sait que : GH = 15 cm ; GF = 6 cm ;
GD = 14,2 cm et HD = 7,3 cm.

Calcule les longueurs EF et EG.

20 Soit un parallélogramme SAIN tel que : SA = 2,8 cm ; SN = 4 cm et $\widehat{ASN}$ = 40°. Le point M appartient à [NS] tel que NM = 7 cm. La droite (MA) coupe la droite (NI) en T.

a. Construis la figure.

b. Calcule NT.

c. Déduis-en IT.

21 Un triangle ABC rectangle en B est tel que : AB = 4 cm ; BC = 3 cm et AC = 5 cm.
Sur la demi-droite [BA), place le point E tel que BE = 8,8 cm.
Trace la droite parallèle à (AC) passant par E, elle recoupe la droite (BC) en F.

a. Construis la figure.

b. Calcule EF.

c. Calcule BF.

22 Construis le triangle FOT tel que :
FO = 6 cm ; OT = 8 cm et FT = 5,6 cm.

Place le point R sur [FO] tel que FR = $\frac{5}{4}$ FO.

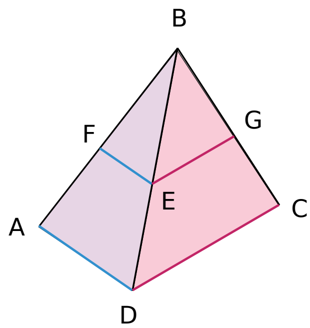
Trace la parallèle à la droite (OT) passant par R. Elle coupe (FT) en E.

a. Calcule RE.

b. Calcule TE.

23 Sur la figure ci-dessous :

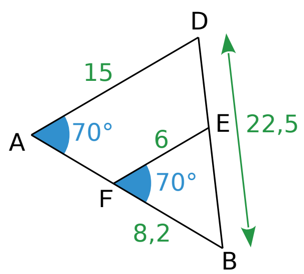
- F ∈ [BA] ; E ∈ [BD] et G ∈ [BC] ;
- Les droites (FE) et (AD) sont parallèles, ainsi que les droites (EG) et (DC) ;
- EF = 3 cm ; BG = 4 cm et GC = 2 cm.



a. Calcule $\frac{BE}{BD}$.

b. Déduis-en AD.

24 On considère la figure suivante, où les points D, E, B sont alignés, ainsi que les points A, F, B. Calcule BE et AB.



25 Construis un parallélogramme ABCD tel que : AB = 6 cm ; AD = 4 cm et BD = 5 cm.
Place un point O sur [BD], tel que BO = 2 cm. Construis la parallèle à (AB) passant par O, elle coupe la droite (BC) en P.

a. Calcule BP.

b. Calcule OP.

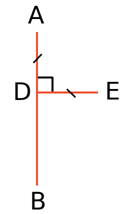
26 EURO est un parallélogramme tel que :
EO = 5 cm et OR = 6 cm.

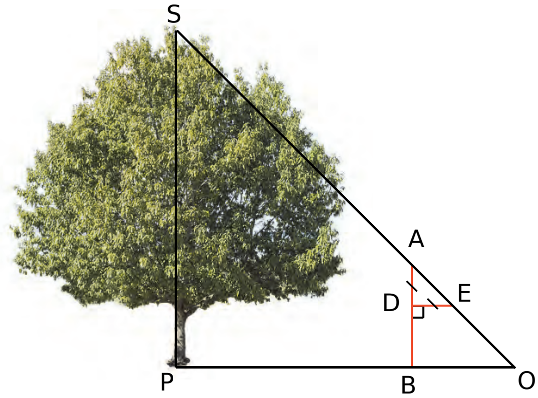
Le point P est le point de (OE) n'appartenant pas à [OE], tel que EP = 3 cm. La droite (PR) coupe [EU] en A.

Calcule les longueurs EA et AU.

27 ***Mesurer des hauteurs inaccessibles***

L'instrument de Gerbert est constitué de deux bâtons perpendiculaires [AB] et [ED] tels que AD = ED.
Soit S le sommet d'un arbre. On considère qu'il est perpendiculaire au sol. Pour mesurer sa hauteur SP, on place l'instrument de telle sorte que les points S, A et E soient alignés.





L'instrument est planté verticalement, c'est-à-dire que (AB) est perpendiculaire à (OB). On sait que :
AD = 0,40 m ; AB = 1,50 m et BP = 8 m.
Le triangle ADE est rectangle et isocèle en D.

On veut mesurer la hauteur SP de l'arbre.

a. Calcule la distance OB. Déduis-en la nature du triangle ABO.

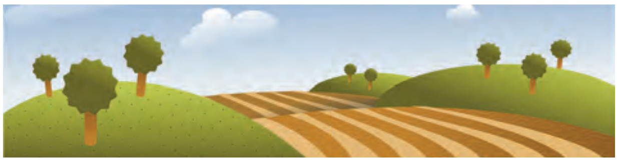
b. Démontre que (AB) et (SP) sont parallèles.

c. Démontre que le triangle SPO est rectangle isocèle en P.

d. Déduis-en la hauteur SP de l'arbre.

e. Une fois l'instrument de Gerbert bien positionné, comme sur le schéma, quelles sont les seules mesures utiles ?

f. Quel calcul doit-on faire pour trouver la hauteur de l'objet ?



28 BANC est un parallélogramme tel que :
BA = 4 cm ; BC = 6 cm et AC = 8 cm.
P est le point de [AC] tel que AP = 2,4 cm.
La parallèle à (BC) passant par P coupe [CN] en O.

a. Trace une figure en vraie grandeur.

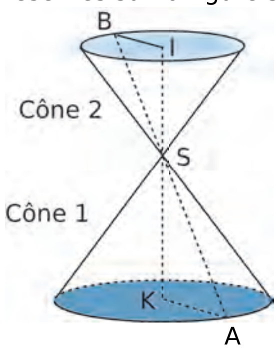
b. Montre que les droites (PO) et (AN) sont parallèles.

c. Calcule les longueurs CO et PO.

29 **Vrai ou Faux**

Soit PEM un triangle. A est un point du segment [PE] et B est un point du segment [PM], tels que : BM = 30 cm ; AB = 30 cm ; ME = 50 cm et (AB) // (ME). À l'aide du théorème de Thalès, on obtient PM = 45 cm.
Vrai ou faux ? Explique ta démarche.

30 On considère deux cônes opposés par le sommet et représentés sur la figure suivante.



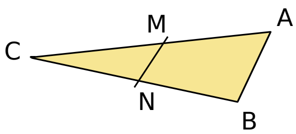
Les droites (AB) et (KI) se coupent en S. De plus, les droites (BI) et (KA) sont parallèles.

On a KA = 4,5 cm ; KS = 6 cm et SI = 4 cm.

Calcule BI.

31 **QCM**

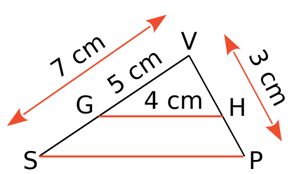
a.



M ∈ [AC], N ∈ [BC] et (MN) // (AB).
CM = 4,5 ; MA = 3 et CN = 3, donc...

R.1	R.2	R.3
CB = 2	CB = 5	CB = $\frac{9}{5}$

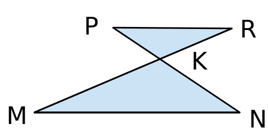
b.



G ∈ [VS], H ∈ [VP] et (GH) // (SP).
On a donc...

R.1	R.2	R.3
VH = 2,1 cm	VH = $\frac{15}{7}$ cm	VH = 1,25 cm

c.



(RM) et (PN) sont sécantes en K et (PR) // (MN).
KR = 6 ; KP = 9 et KM = 15, donc...

R.1	R.2	R.3
KN = 3,6	KN = 22,5	KN = 10

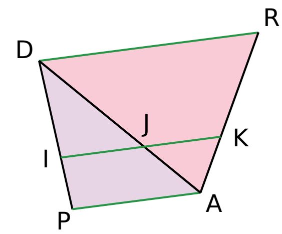
32 On considère le trapèze DRAP tel que :
- (AP) est parallèle à (DR) et à (IJ) ;
- AP = 32 mm ; DR = 48 mm ; DA = 45 mm ; DI = 15 mm et IP = 5 mm ;
- Les points I, J et K sont alignés.

a. Calcule IJ.

b. Calcule DJ.

c. Calcule la valeur exacte de $\frac{AJ}{AD}$.

d. Déduis-en JK.



33 LOT est un triangle tel que : OL = 9 cm ; OT = 7 cm et LT = 5 cm.

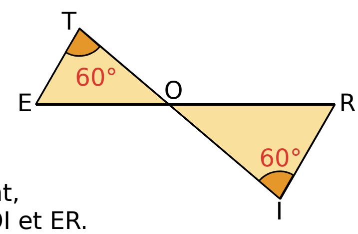
On appelle M le milieu du segment [LO]. La parallèle à (TL) passant par M coupe [TO] en N.

a. Montre que le point N est le milieu du segment [TO].

b. Calcule la longueur MN.

34 Les points T, O, I sont alignés, ainsi que les points R, O, E.

On donne :
ET = 2,4 cm ;
OT = 6,4 cm ;
OR = 7 cm
et RI = 3 cm.



Calcule, en justifiant, les longueurs OE, OI et ER.

35 **TICE Géométrie Dynamique**

a. Construis un triangle ABC.

b. Construis le milieu J de [AB], le milieu K de [AJ] et le milieu L de [JB].

c. Construis la parallèle à (BC) passant par K. Elle coupe [AC] en H.

d. Construis la parallèle à (BC) passant par J. Elle coupe [AC] en M.

e. Construis la parallèle à (BC) passant par L. Elle coupe [AC] en N.

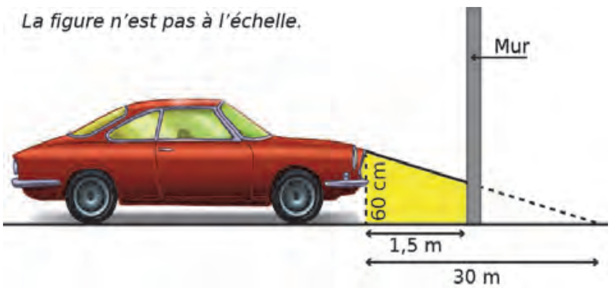
f. Déplace le point C. Que remarques-tu ? Explique.

36 *Sécurité routière*

D'après le Code de la route (article R313 - 3) :

> Les feux de croisement d'une voiture permettent d'éclairer efficacement la route, la nuit par temps clair, sur une distance minimale de 30 m.

Afin de contrôler régulièrement la portée des feux de sa voiture, Jacques veut tracer un repère sur le mur, au fond de son garage.



Les feux de croisement sont à 60 cm du sol.

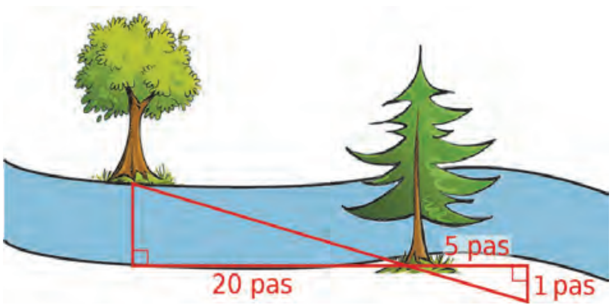
À quelle hauteur doit-il placer le repère sur son mur pour pouvoir régler correctement ses phares ?

37 *Promenons-nous dans les bois*

Par un beau dimanche ensoleillé, Julien se promène au pied de la montagne Sainte-Eulalie, au bord de la rivière Arc.

Il se demande quelle est la largeur de la rivière.

Il prend des repères, compte ses pas et dessine le schéma ci-dessous.



a. Construis une figure à l'échelle représentant cette situation.

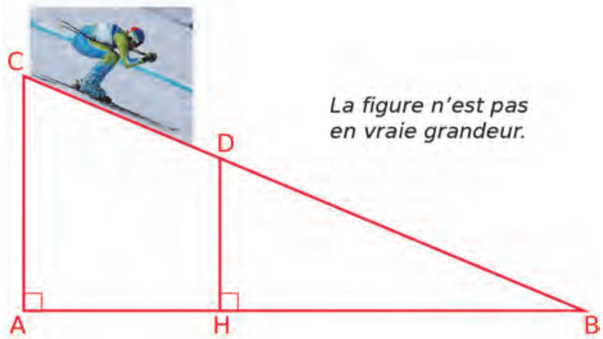
b. Quelle largeur obtient approximativement Julien, en nombre de pas ?

c. Julien estime la longueur de son pas à 65 cm. Donne une valeur approximative de la largeur de cette rivière, au centimètre près.

38

Un skieur dévale, tout schuss, une piste rectiligne représentée ci-dessous par le segment [CB] de longueur 1 200 m.

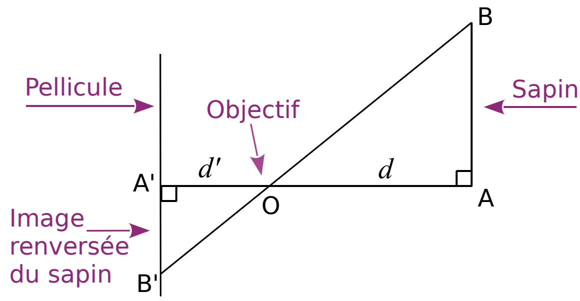
À son point de départ C, le dénivelé par rapport au bas de la piste, donné par la longueur AC, est de 200 m. Après une chute, il est arrêté au point D. Le dénivelé, donné par la longueur DH, est alors de 150 m.



Calcule la longueur DB qu'il lui reste à parcourir.

39

Voici le schéma du fonctionnement d'un appareil photo argentique : un objet [AB] (par exemple, un sapin), situé à une distance d de l'objectif O, a une image [A'B'] située à une distance d' de O.



a. Prouve que (AB) et (A'B') sont parallèles.

b. Démontre l'égalité : $\dfrac{d}{d'} = \dfrac{AB}{A'B'}$.

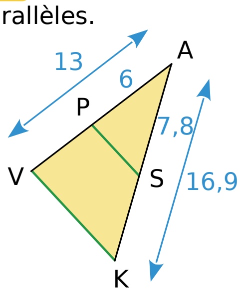
c. Pour l'appareil Mega+, $d' = 50$ mm.
Joe veut photographier un catamaran, d'une hauteur de 12 m, qui se trouve à 15 m de l'objectif. Quelle hauteur aura l'image qui se formera sur la pellicule ?

Démontrer que deux droites sont ou ne sont pas parallèles

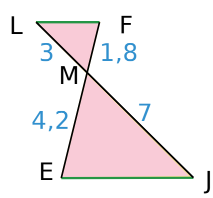
Les figures des exercices **40**, **41** et **42** sont composées de quatre droites.

40 Démontre que les droites vertes sont parallèles.

a.

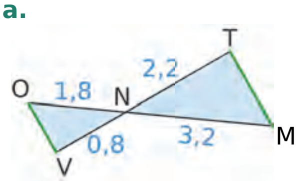


b.

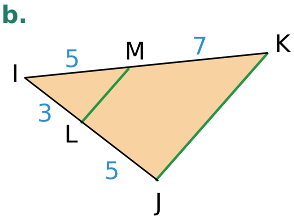


41 Démontre que les droites vertes ne sont pas parallèles.

a.

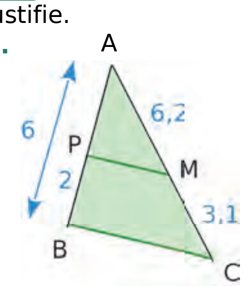


b.

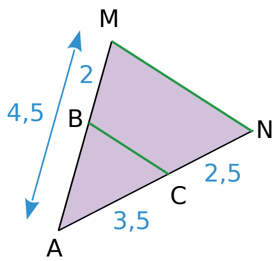


42 Les droites vertes sont-elles parallèles ? Justifie.

a.

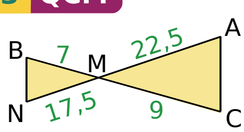


b.



43 **QCM**

a.



Les droites (AN) et (BC) sont sécantes en M.

R.1	R.2	R.3
(AC) et (BN) sont parallèles	(AC) et (BN) ne sont pas parallèles	On ne peut rien dire

b. Si $\frac{CM}{CN} = \frac{CA}{CB}$, et si C,M,N d'une part et C,A,B d'autre part sont alignés dans cet ordre, alors...

R.1	R.2	R.3
(CM) et (CN) sont parallèles	(NM) et (AB) sont parallèles	(AM) et (BN) sont parallèles

44 ABC est un triangle. D est un point de [AB] et E est un point de (AC) n'appartenant pas à [AC]. On donne : AB = 4 cm ; AC = 3 cm ; AD = 1,2 cm et AE = 0,9 cm.

a. Alixien a écrit sur sa copie :

« Les droites (EC) et (DB) sont sécantes en A.

D'une part, $\frac{AD}{AB} = \frac{1,2}{4} = \frac{12}{40} = \frac{3}{10}$.

D'autre part, $\frac{AE}{AC} = \frac{0,9}{3} = \frac{9}{30} = \frac{3}{10}$.

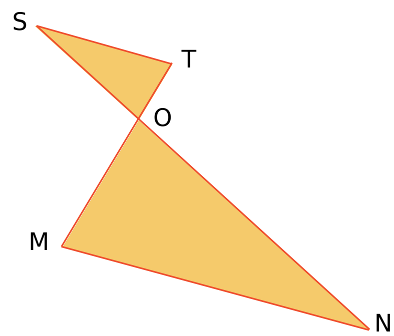
Comme $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$, *alors les droites (BC) et (ED) sont parallèles. »*

Quel théorème Alixien a-t-il utilisé ?

b. Trace une figure.

c. La réponse d'Alixien est-elle juste ? Si non, rédige la bonne réponse.

45 Ci-dessous, les droites (MT) et (SN) sont sécantes en O. On donne : OM = 2,8 cm ; ON = 5,4 cm ; OS = 2,7 cm et OT = 1,4 cm.



Démontre que (MN) et (ST) sont parallèles.

46 ABC est un triangle tel que : BC = 3,3 cm ; AC = 2,4 cm et AB = 2,5 cm.

a. Réalise une figure. Place le point D sur [AC) tel que CD = 6 cm, et le point E sur [BC) tel que CE = 9 cm.

b. Explique pourquoi les droites (ED) et (AB) ne sont pas parallèles.

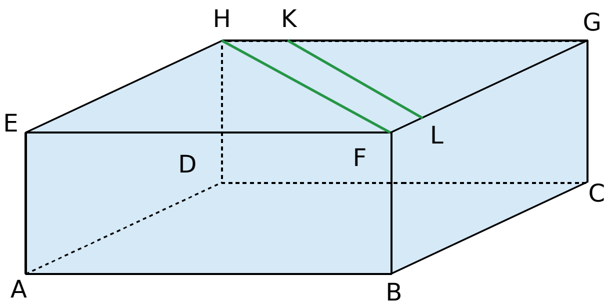
47 ABC est un triangle rectangle en A tel que : AB = 12 cm et AC = 8 cm.

Le point F est le point du segment [AC] tel que AF = 4 cm, et le point E est le point de [AB] tel que AE = 6 cm.

a. Dessine une figure en vraie grandeur.

b. Démontre que la droite (EF) est parallèle à la droite (BC).

48 ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle tel que : AB = 7 cm ; AD = 3 cm et AE = 2,5 cm.



La figure n'est pas en vraie grandeur.

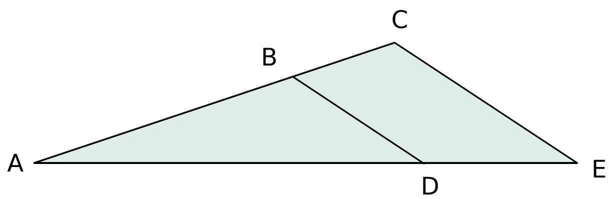
Le point K appartient à l'arête [GH], et le point L appartient à l'arête [GF].

On donne GK = 6 cm et GL = 2,6 cm.

Les droites (KL) et (HF) sont-elles parallèles ? Justifie ta réponse.

49 Sur la figure suivante :

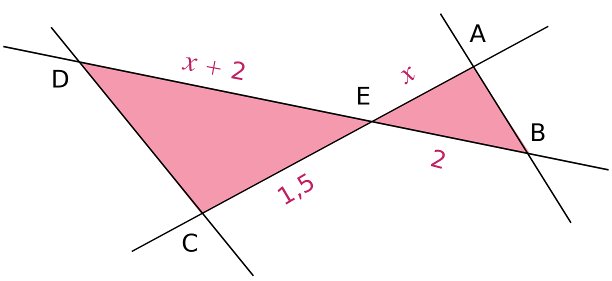
- D ∈ [AE] et B ∈ [AC] ;
- AB = 6,3 cm ; BC = 4,9 cm ; AE = 16 cm et DE = 7 cm.



Les droites (BD) et (CE) sont-elles parallèles ? Justifie ta réponse.

50 **Vrai ou Faux**

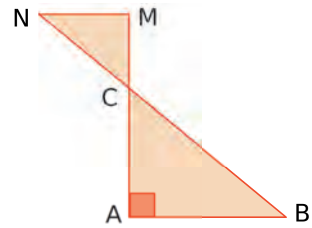
L'unité de longueur choisie est le mètre.



a. Pour $x = 2{,}5$: les droites (AB) et (CD) ne sont pas parallèles.
Vrai ou faux ? Explique ta démarche.

b. Pour $x = 1$: les droites (AB) et (DC) ne sont pas parallèles.
Vrai ou faux ? Explique ta démarche.

51 ***Papillon !***

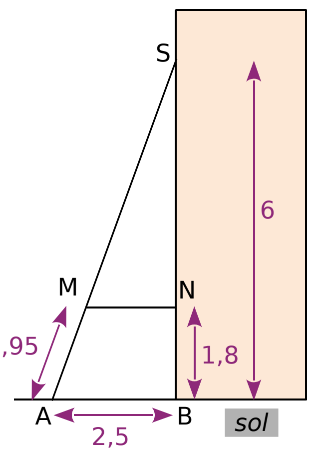


Les droites (AM) et (BN) sont sécantes en C.

a. On donne AB = 6 cm et BC = 10 cm.
Démontre que AC = 8 cm.

b. On donne CM = 2,56 cm et CN = 3,2 cm.
Explique pourquoi les droites (AB) et (MN) sont parallèles.

52 Pour consolider un bâtiment, des charpentiers ont construit un contrefort en bois.
(Sur le schéma ci-dessous, les mesures sont en mètres.)

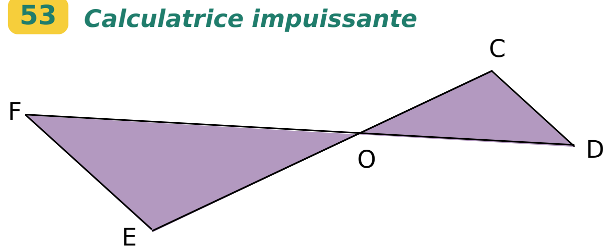


a. En considérant que le montant [BS] est perpendiculaire au sol, calcule la longueur AS.

b. Calcule les longueurs SM et SN.

c. Démontre que la traverse [MN] est bien parallèle au sol.

53 ***Calculatrice impuissante***



Sur la figure ci-dessus, les droites (DF) et (CE) sont sécantes en O. De plus, on donne : OE = 1 203,17 ; OC = 1 056,23 ; OF = 1 264,09 et OD = 1 109,71.
Démontre que les droites (EF) et (CD) sont parallèles.

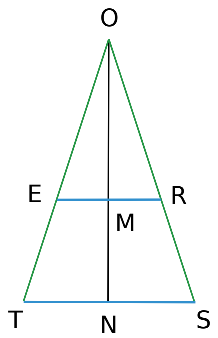
54 Sur la figure ci-dessous, qui n'est pas à l'échelle, les points O, E, T, les points O, M, N et les points O, R, S sont alignés trois par trois.
RE = 8 cm ; OM = 5 cm et ON = 25 cm.
Les droites (RE) et (ST) sont parallèles.
On souhaite calculer ST.

a. Montre que $\dfrac{OE}{OT} = \dfrac{OM}{ON}$.

b. Montre que $\dfrac{OE}{OT} = \dfrac{ER}{TS}$.

c. Que peux-tu en déduire pour $\dfrac{OM}{ON}$ et $\dfrac{ER}{TS}$?

d. Calcule ST.



55 ABCD est un trapèze de bases [AB] et [CD], tel que : AB = 6 cm ; CD = 10 cm ; BC = 5 cm et AD = 4 cm. (AD) et (BC) se coupent en E.

a. Fais un schéma à main levée.

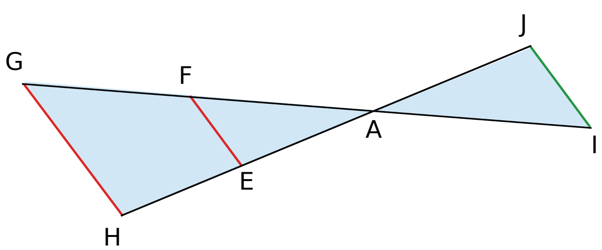
b. Prouve que le triangle DCE est isocèle.

c. Construis ABCD en vraie grandeur.

56 RST est un triangle tel que :
RS = 4 cm ; ST = 6 cm et TR = 7 cm.
M est un point du segment [RS].
La parallèle à (ST) passant par M coupe [RT] en N.
On désigne par x la longueur de [MS].

Est-il possible que le triangle SMN soit isocèle en M ? Si oui, pour quelle valeur de x ?

57 On considère le schéma ci-dessous.

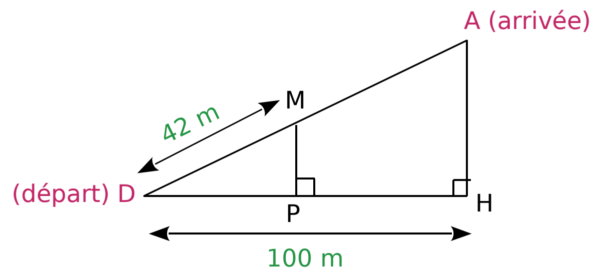


Les droites (IG) et (JH) se coupent en un point A. Le point E est sur (JH), et le point F est sur (IG). Les droites (EF) et (HG) sont parallèles. On a : AE = 3 cm ; AF = 4 cm ; AH = 7 cm et EF = 6 cm.

a. Calcule les longueurs AG et HG en justifiant la démarche utilisée. Donne les résultats sous la forme d'un nombre entier ou d'une fraction irréductible.

b. On a AI = 6 cm et AJ = 4,5 cm. Les droites (IJ) et (EF) sont-elles parallèles ? Justifie la démarche utilisée.

58 Funiculaire : chemin de fer à traction par câble pour la desserte des voies à très forte pente.



La longueur AD de la voie du funiculaire est de 125 m.

a. De quelle hauteur AH s'est-on élevé à l'arrivée ?

Lorsque le funiculaire a parcouru 42 m, il s'est élevé d'une hauteur MP.

b. Fais un dessin à l'échelle 1/1 000.

c. Que peut-on dire des droites (MP) et (AH) ? Justifie la réponse.

d. Calcule MP.

59 Dans un triangle ABC, on place un point D sur le segment [BC]. La parallèle à (AB) passant par D coupe [AC] en E, et la parallèle à (AC) passant par D coupe [AB] en F.

a. Compare $\dfrac{AF}{AB}$ et $\dfrac{CD}{CB}$, puis $\dfrac{AE}{AC}$ et $\dfrac{BD}{BC}$.

b. Où faut-il placer le point D pour que les droites (EF) et (BC) soient parallèles ?

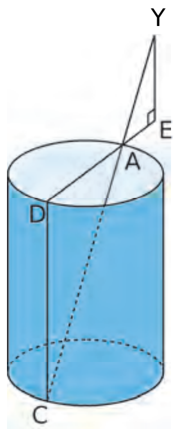
60 On considère un triangle ADF, tel que :
AD = 6,4 cm ; AF = 8 cm et DF = 4,8 cm.

a. Construis le triangle ADF puis démontre qu'il est rectangle en D.

b. Place le point B sur (AD) tel que AB = 4 cm et B $\notin$ [AD]. La perpendiculaire à (AD) passant par B coupe (AF) en C.
Démontre que les droites (BC) et (DF) sont parallèles.

c. Calcule AC et BC.

61 [AD] est un diamètre d'un puits de forme cylindrique. Le point C est à la verticale de D, au fond du puits.



Émilie se trouve au point E de la demi-droite [DA), de sorte que ses yeux, notés Y sur la figure, sont alignés avec les points A et C.

On sait que :
AD = 1,5 m ; EY = 1,7 m et EA = 0,6 m.

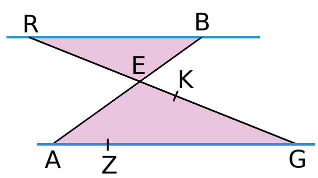
a. Démontre que les droites (DC) et (EY) sont parallèles.

b. Calcule DC, la profondeur du puits.

62 Sur la figure ci-dessous, les droites (AG) et (RB) sont parallèles. Les droites (AB) et (RG) se coupent en E.

L'unité de longueur est le centimètre.

On donne BE = 3 ; AE = 5 ; AG = 10 et EG = 8.



a. Calcule les distances RB et RE.

b. K est le point de [EG] tel que GK = 6,4.
Z est le point de [AG] tel que GZ = 8.
Montre que les droites (ZK) et (AE) sont parallèles.

63 Vrai ou Faux

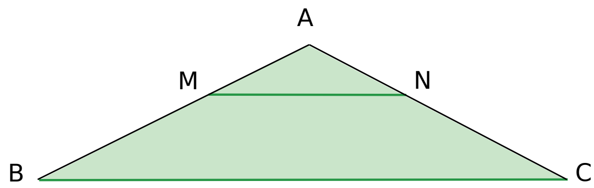
P.1. Si $\frac{CM}{CN} = \frac{CA}{CB}$, alors (MN) et (AB) sont parallèles.

P.2. Si $\frac{CM}{CN} = \frac{CA}{CB}$, alors (MA) et (NB) sont parallèles.

P.3. La droite qui joint les milieux de deux côtés d'un triangle est parallèle au troisième côté.

64 Dans le triangle ABC ci-dessous, on donne AB = 6 cm et BC = 9 cm.

M est le point de [AB] tel que AM = 2 cm.
La droite parallèle à (BC) passant par M coupe [AC] en N.



a. Calcule MN.

b. Calcule la valeur exacte de $\frac{AN}{AC}$.

c. On suppose que [NC] mesure 4,4 cm.
Calcule AN et AC.

65 Construis un triangle EFG, rectangle en E, tel que : EG = 15 cm et EF = 10 cm.

a. Calcule FG. Tu arrondiras au millimètre.

b. Calcule la mesure de l'angle $\widehat{EFG}$, arrondie au degré.

c. La bissectrice (d) de l'angle $\widehat{EFG}$ coupe [EG] en H. Calcule FH et EH en arrondissant au millimètre.

d. La parallèle à (EF) passant par G coupe (d) en K. Calcule GK. Tu arrondiras au millimètre.

66 ***Thalès et réciproque***

a. Construis les triangle ROC et ARC, de telle sorte que les points A et O soient placés de part et d'autre de la droite (RC).

b. Place un point F sur [AR]. La parallèle à (AC) passant par F coupe [RC] en G, et la parallèle à (OC) passant par G coupe [RO] en H.

c. Montre que $\frac{RF}{RA} = \frac{RG}{RC}$, puis que $\frac{RG}{RC} = \frac{RH}{RO}$.

d. Démontre que les droites (FH) et (OA) sont parallèles.

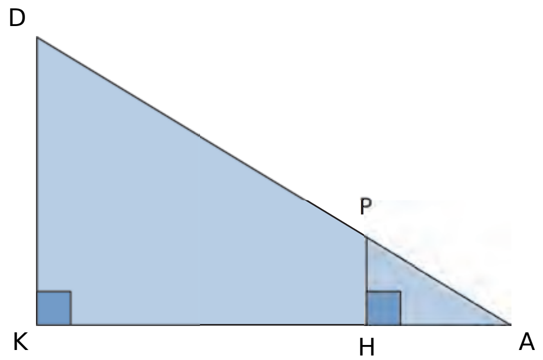
67 Construis un triangle RST tel que :
RS = 10 cm ; RT = 14 cm et ST = 12 cm.
Place un point M sur [RS]. On pose RM = x cm.
La parallèle à (ST) passant par M coupe [RT] en N.

a. Exprime le périmètre du triangle RMN en fonction de x.

b. Exprime le périmètre du trapèze MSTN en fonction de x.

c. Où faut-il placer le point M pour que les deux périmètres soient égaux ?

68 Dans la figure ci-dessous qui n'est pas à l'échelle :

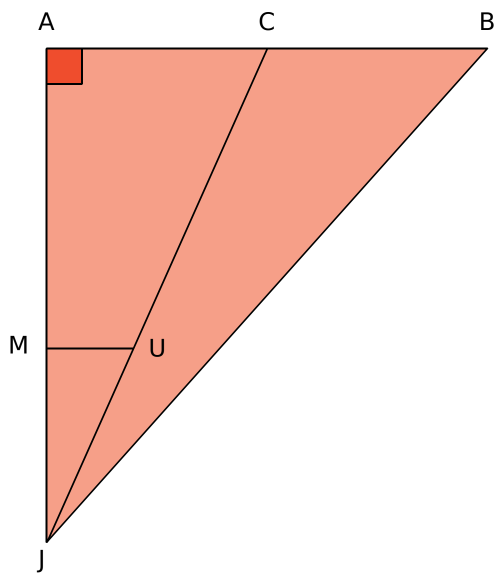


- les points D, P et A sont alignés ;
- les points K, H et A sont alignés ;
- DA = 60 cm ; DK = 11 cm ; DP = 45 cm.

a. Calcule KA au millimètre près.

b. Calcule HP.

69 On considère la figure ci-dessous qui n'est pas à l'échelle.



- Le triangle JAB est rectangle en A.
- Les droites (MU) et (AB) sont parallèles.
- Les points A, M et J sont alignés.
- Les points C, U et J sont alignés.
- Les points A, C et B sont alignés.
- AB = 7,5 m ; MU = 3 m ; JM = 10 m ; JA = 18 m.

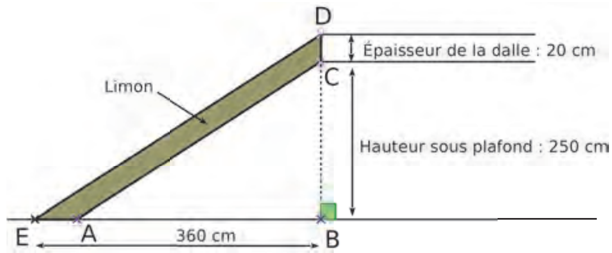
a. Calcule la longueur JB.

b. Montre que la longueur AC est égale à 5,4 m.

c. Calcule l'aire du triangle JCB.

70 Germaine souhaite construire un escalier pour monter à l'étage de son appartement.

Elle a besoin pour cela de connaitre les dimensions du limon (planche dans laquelle viendront se fixer les marches de cet escalier). Elle réalise le croquis ci-dessous.



Sur ce croquis :
- le limon est représenté par le quadrilatère ACDE ;
- les droites (AC) et (ED) sont parallèles ;
- les points E, A et B sont alignés ;
- les points B, C et D sont alignés.

a. Prouve que ED = 450 cm.

b. Calcule les deux dimensions AC et AE de cette planche. Arrondis les résultats au centimètre.

71 Soit ABC un triangle tel que :
AC = 11 cm ; AB = 7 cm et BC = 8 cm.

Soit M un point du segment [BC].
On pose BM = x.

La parallèle à (AC) passant par M coupe [AB] en P, et la parallèle à (AB) passant par M coupe [AC] en Q.

Le but de l'exercice est de déterminer la position du point M pour que MP + MQ = 9 cm.

a. Exprime MP, puis MQ, en fonction de x.

b. Détermine la position du point M sur le segment [BC], à l'aide d'une résolution d'équation.

72 L'unité de longueur est le centimètre.

ABC est un triangle tel que : AB = 9 ; AC = 15 et BC = 12.

a. Démontre que ABC est rectangle en B.

b. Calcule l'aire du triangle ABC.

c. Trace en vraie grandeur le triangle ABC.
E est le point du segment [AB] tel que AE = 3.
F est le point du segment [AC] tel que AF = 5.

d. Démontre que la droite (EF) est parallèle à la droite (BC).

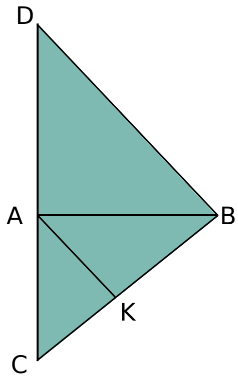
e. Calcule EF.

f. Calcule l'aire du trapèze BEFC.

73 *Thalès et autres propriétés*

Reproduis la figure ci-contre et complète-la au fur et à mesure des questions.

On donne :
AC = 4,2 cm ; AB = 5,6 cm et BC = 7 cm.
K est le point du segment [BC], tel que CK = 3 cm.
La parallèle à la droite (AK) passant par B coupe la droite (AC) en D.



a. Démontre que le triangle ABC est rectangle.

b. Calcule CD.

c. Calcule AD. Déduis-en que le triangle ADB est un triangle rectangle isocèle.

d. Détermine la mesure de l'angle $\widehat{DBA}$.

e. Démontre que l'angle $\widehat{KAB}$ est égal à 45°.
Que peux-tu en déduire pour la droite (AK) ?

f. La perpendiculaire à (AB) passant par K coupe (AB) en E, et la perpendiculaire à (AC) passant par K coupe (AC) en F.
Démontre que le quadrilatère AEKF est un rectangle.

g. Calcule KE et KF.
Quelle précision peux-tu alors apporter quant à la nature du quadrilatère AEKF ?

74 *Thalès et bissectrice*

Voici l'énoncé d'une propriété :

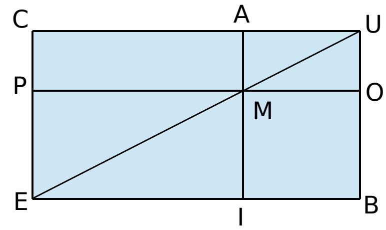
> Dans un triangle ABC, la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ partage le côté [BC] en deux segments, [BK] et [CK], qui vérifient l'égalité $\dfrac{KC}{KB} = \dfrac{AC}{AB}$.

a. Soit ABC un triangle. La bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ coupe le côté [BC] en K. La parallèle à (AK) passant par C coupe (AB) en D.
Démontre que le triangle ADC est isocèle en A.

b. Démontre l'égalité proposée dans la propriété ci-dessus.

75 *Des rectangles*

a. Construis un rectangle CUBE.
On pose CU = L et CE = l.



b. Construis, à la règle et au compas, le point M du segment [UE] tel que UM = $\dfrac{2}{5}$ UE.

c. On appelle A, P, I et O les points d'intersection respectifs des droites passant par M, et perpendiculaires aux droites (CU), (CE), (EB) et (BU).

d. Exprime, en fonction de L ou l, les longueurs MA, MI, MP et MO.

e. Compare les aires des rectangles CAMP et MOBI.

76

Dans un triangle ABC, la hauteur issue de B coupe [AC] en D, et la hauteur issue de C coupe [AB] en E. Dans le triangle ADE, la hauteur issue de D coupe [AE] en F, et la hauteur issue de E coupe [AD] en G.

a. Démontre les égalités :

$$AD \times AE = AB \times AG = AC \times AF.$$

b. Démontre que les droites (FG) et (BC) sont parallèles.

77

On considère un rectangle ABCD. Sur les côtés [AB], [BC], [CD] et [DA], on place les points E, F, G et H tels que : $\dfrac{AE}{AB} = \dfrac{AH}{AD} = \dfrac{CF}{CB} = \dfrac{CG}{CD} = k$, où k est un nombre compris entre 0 et 1.

a. Démontre que les droites (EH) et (FG) sont parallèles.

b. Démontre que $\dfrac{BE}{BA} = \dfrac{BF}{BC}$, puis que $\dfrac{DG}{DC} = \dfrac{DH}{DA}$.

c. Démontre que le quadrilatère EFGH est un parallélogramme.

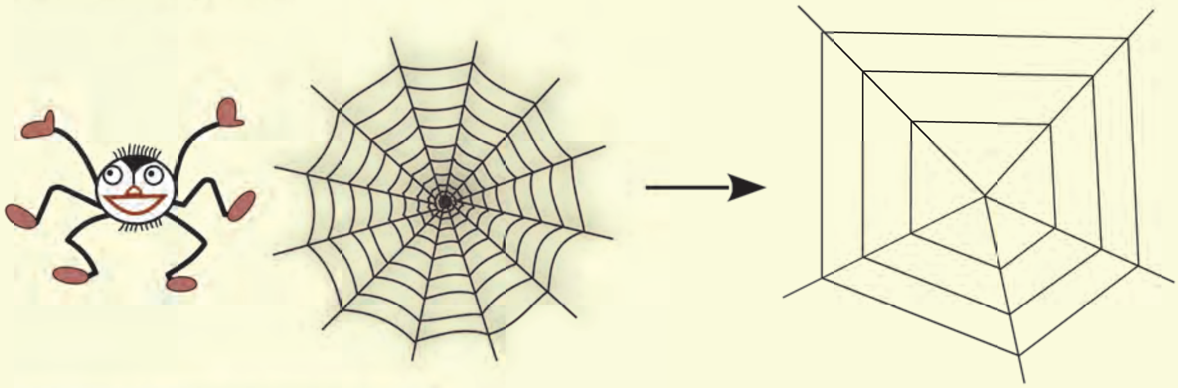
d. Démontre que le périmètre de EFGH reste constant lorsque k varie.

78 TICE Géométrie Dynamique

Construis la figure de l'exercice précédent avec un curseur pour la valeur de k. Vérifie les affirmations qui ont été démontrées.

Toile d'araignée

Pour modéliser une toile d'araignée, on trace plusieurs demi-droites de même origine, puis un ensemble de segments.

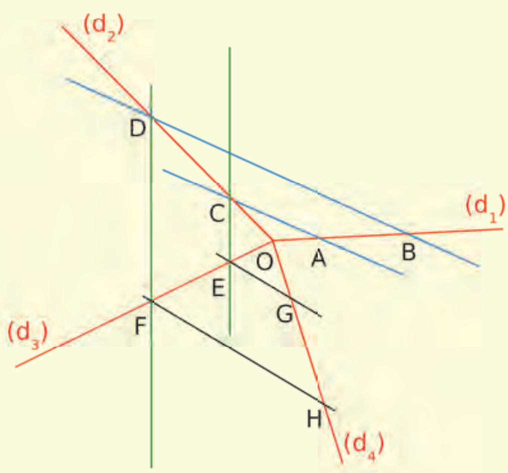


TICE Géométrie Dynamique

Partie 1

a. Construis la figure ci-contre à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.

- Construis quatre demi-droites (d_1), (d_2), (d_3) et (d_4) d'origine O.
- Place les points A et B sur (d_1), C sur (d_2), E sur (d_3) et G sur (d_4).
- Place le point D sur (d_2), tel que (AC) et (BD) sont parallèles.
- Place le point F sur (d_3), tel que (EC) et (FD) sont parallèles.
- Place le point H sur (d_4), tel que (EG) et (FH) sont parallèles.



b. Construis les droites (AG) et (BH). Quelle conjecture peux-tu faire ? Vérifie ta conjecture à l'aide du logiciel.

c. Démontre la conjecture que tu viens de faire.
Si on avait construit des demi-droites (d_5), (d_6), ..., la conjecture finale serait-elle différente ?

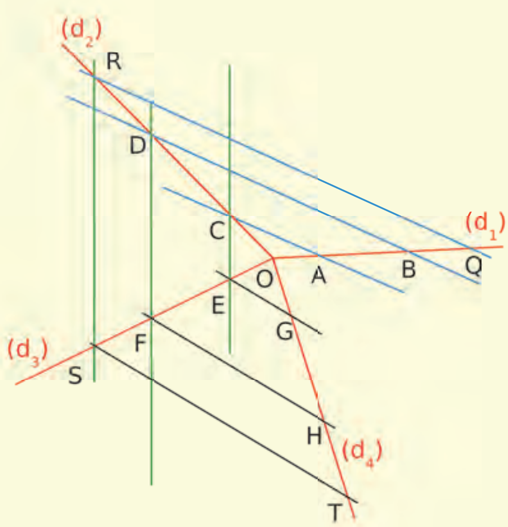
Partie 2

d. Place un point Q sur (d_1) et un point R sur (d_2), tels que (QR) et (BD) sont parallèles. Construis de la même façon les points S et T.

e. Que peut-on dire des droites (BH) et (QT) ? Vérifie à l'aide du logiciel.

f. Démontre cette nouvelle conjoncture.

g. Si on avait construit un nouveau point Z sur (d_1) et poursuivi le même type de constructions, la conjecture finale serait-elle différente ?



G2

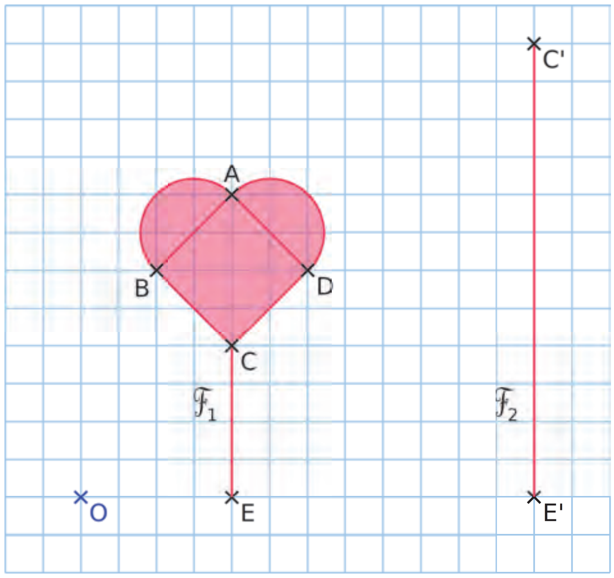
Homothétie

Activités

1 Un cœur gros comme ça !

Cours : 1

a La figure $\mathcal{F}_2$ est un agrandissement de la figure $\mathcal{F}_1$. Reproduis $\mathcal{F}_1$ puis $\mathcal{F}_2$, en nommant A', B' et D' les points de la figure $\mathcal{F}_2$ correspondant respectivement aux points A, B et D de la figure $\mathcal{F}_1$.



b Quel est le coefficient de cet agrandissement ?

c Que peux-tu dire des points O, E et E' ? Des points O, C et C' ? Donne d'autres groupes de trois points ayant ces particularités.

L'agrandissement qui transforme $\mathcal{F}_1$ en $\mathcal{F}_2$ est encore appelé « homothétie de centre O et de rapport 3 ».

d Compare les figures $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$.

e La figure $\mathcal{F}_1$ est l'image de la figure $\mathcal{F}_2$ par une autre homothétie. D'après toi, quels sont le centre et le rapport de cette homothétie ?

2 Un air de déjà vu...

Cours : 1

TICE Géométrie Dynamique

a Place trois points O, M et N non alignés. Trace les droites (OM) et (ON).
Crée un curseur k, variant de 0 à 5.

b Construis les points M' et N', images respectives de M et N par l'homothétie de centre O et de rapport k.

c Que dire des points M' et N', dans le cas où le nombre k vaut 1 ? Et si k vaut 0 ? Étudie enfin le cas où $k = \frac{1}{2}$.

d Que dire des quotients $\frac{OM'}{OM}$ et $\frac{ON'}{ON}$?
Que peux-tu en déduire concernant les segments [MN] et [M'N'] ?

e On souhaite étudier le cas où le nombre k est négatif. Redéfinis le nombre k, afin qu'il puisse varier entre -5 et 5.
Les réponses à la question **d** sont-elles encore exactes ?

f Que peut-on dire de l'image d'un segment par une homothétie ?

g Que dire de l'homothétie de centre O et de rapport $k = -1$?

h Comment construire, sur papier, l'image d'un point M par l'homothétie de centre O (O distinct de M) et de rapport -3 ? Détaille le procédé de construction que tu proposes.

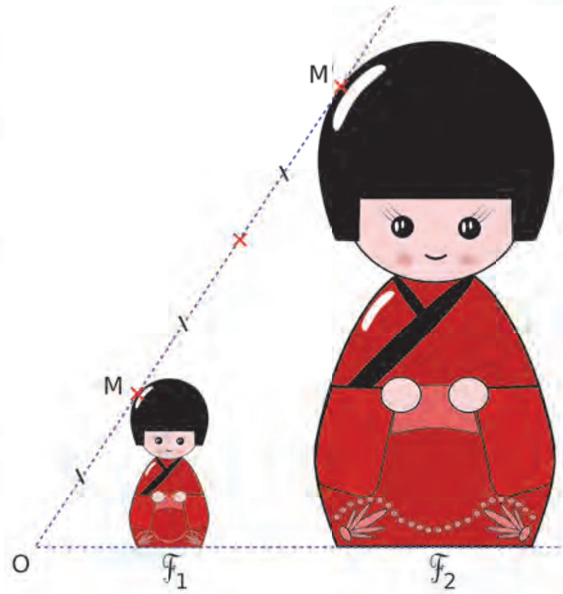
1 Homothétie

7 19

A Introduction

- La figure $\mathcal{F}_2$ est un **agrandissement** de rapport 3 de la figure $\mathcal{F}_1$.
  On dit que la figure $\mathcal{F}_2$ est l'image de la figure $\mathcal{F}_1$ par l'**homothétie** de centre O et de rapport 3.
- La figure $\mathcal{F}_1$ est une **réduction** de rapport $\frac{1}{3}$ de la figure $\mathcal{F}_2$.

  On dit que la figure $\mathcal{F}_1$ est l'image de la figure $\mathcal{F}_2$ par l'**homothétie** de centre O et de rapport $\frac{1}{3}$.



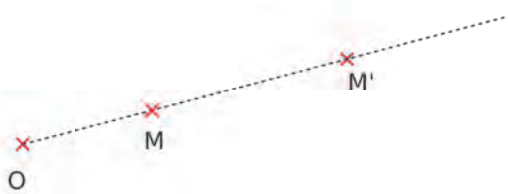
B Image d'un point

Définition

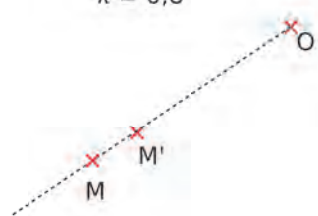
L'image d'un point M par l'homothétie de centre O et de rapport k positif est le point M' tel que :
- M' appartient à [OM) ;
- OM' = $k \times$ OM.

Exemples :

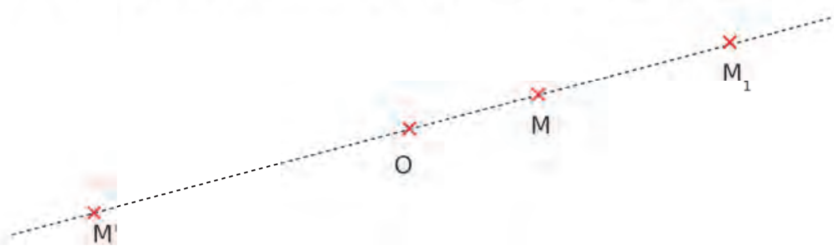
$k = 2{,}5$



$k = 0{,}8$



Remarque :
Dans le cas où k est négatif, par exemple $k = -2{,}5$, on construit l'image M_1 de M par l'homothétie de rapport 2,5 puis on construit le symétrique M' de M_1 par rapport à O.



C Image d'un segment

Propriété Soient A, B et O trois points, et k un nombre positif.

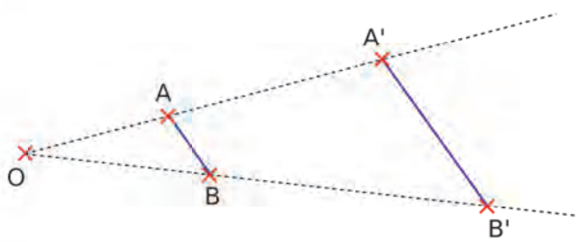
Si les points A' et B' sont les images respectives des points A et B par l'homothétie de centre O et de rapport k, alors :

- A'B' = $k \times$ AB ;
- les segments [AB] et [A'B'] sont parallèles.

Démonstration :

Soient A' et B' les images respectives des points A et B par une homothétie de centre O et de rapport k.

- On a $\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = k$ donc, d'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (AB) et (A'B') sont parallèles.
- On peut donc appliquer le **théorème de Thalès** dans les triangles OAB et OA'B' et on obtient : $\frac{A'B'}{AB} = k$.



D Propriétés de l'homothétie

Propriétés

L'homothétie **conserve** l'**alignement**, les **milieux** et la **mesure des angles**.

Dans une homothétie de rapport k positif :

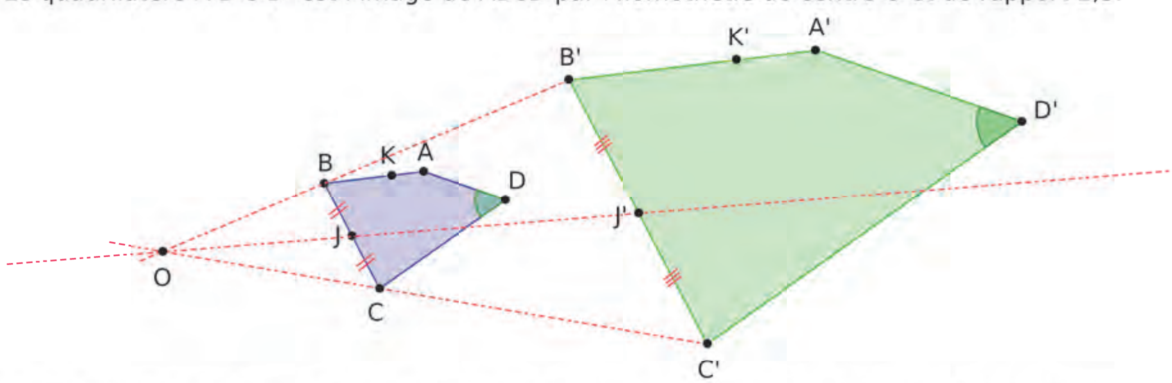
- les **longueurs** sont multipliées par k ;
- les **aires** sont multipliées par k^2.

La figure $\mathcal{F}_2$ est l'image de la figure $\mathcal{F}_1$ par cette homothétie :

- si $k > 1$, alors $\mathcal{F}_2$ est un **agrandissement** de $\mathcal{F}_1$;
- si $0 < k < 1$, alors $\mathcal{F}_2$ est une **réduction** de $\mathcal{F}_1$.

Exemple :

Le quadrilatère A'B'C'D' est l'image de ABCD par l'homothétie de centre O et de rapport 2,5.



- Les points A, B, K sont alignés, donc leurs images respectives A', B', K' sont également alignées.
- Le point J est le milieu du segment [BC], donc son image J' est le milieu du segment [B'C'].
- L'angle $\widehat{A'D'C'}$ est l'image de l'angle $\widehat{ADC}$, ils ont donc la même mesure.
- Les longueurs sont multipliées par 2,5. Exemple : C'D' = 2,5 $\times$ CD
- Les aires sont multipliées par 2,5² soit 6,25. Exemple : Aire(A'B'C'D') = 6,25 $\times$ Aire(ABCD)

2 Triangles semblables

→ 29

A Définition

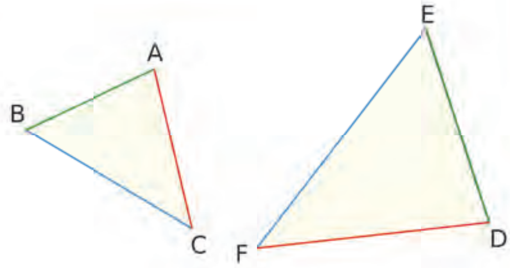
Définition Deux triangles sont **semblables** si les longueurs de leurs côtés sont proportionnelles.

Exemple : Les triangles ABC et DEF sont semblables.

Le tableau suivant est un tableau de proportionnalité.

Triangle ABC	AB	AC	BC
Triangle DEF	DE	DF	EF

Donc $\frac{DE}{AB} = \frac{DF}{AC} = \frac{EF}{BC}$.



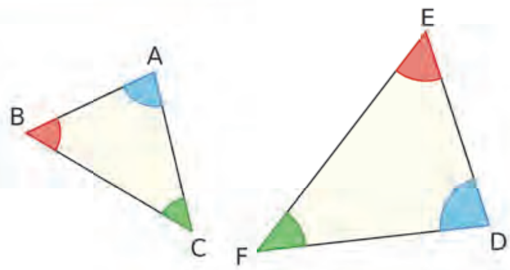
Remarque :
Si deux triangles sont homothétiques (c'est-à-dire si l'un est l'image de l'autre par une homothétie), alors ils sont semblables.

B Propriétés

Propriété 1 **Si** deux triangles sont semblables,
alors leurs angles ont la même mesure deux à deux.

Exemple : On reprend les triangles précédents.

Triangle ABC	$\widehat{ACB}$ opposé à [AB]	$\widehat{ABC}$ opposé à [AC]	$\widehat{BAC}$ opposé à [BC]
Triangle DEF	$\widehat{DFE}$ opposé à [DE]	$\widehat{FED}$ opposé à [DF]	$\widehat{FDE}$ opposé à [EF]



Les angles opposés aux côtés proportionnels ont la même mesure : $\widehat{ACB} = \widehat{DFE}$; $\widehat{ABC} = \widehat{FED}$ et $\widehat{BAC} = \widehat{FDE}$.

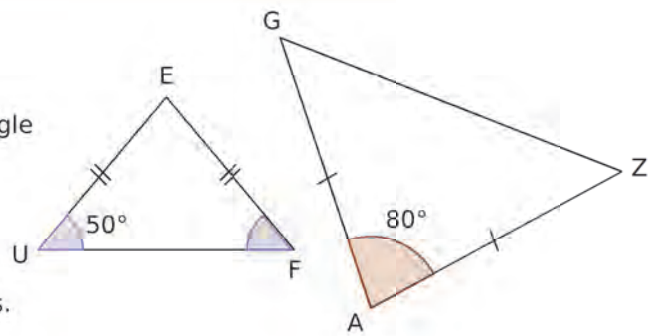
Propriété 2
Si deux triangles ont leurs angles de même mesure deux à deux,
alors ils sont semblables.

Exemple :
Le triangle FEU est isocèle en E,
donc $\widehat{EFU} = \widehat{EUF} = 50°$.

La somme des mesures des angles d'un triangle est 180°, donc $\widehat{FEU} = 180° - 2 \times 50° = 80°$.

GAZ est un triangle isocèle en A,
donc $\widehat{AGZ} = \widehat{AZG} = (180° - 80°) \div 2 = 50°$.

Les deux triangles ont leurs angles de même mesure 2 à 2, ils sont donc semblables.



Remarques :
- Cette propriété est la réciproque de la précédente.
- Deux triangles équilatéraux sont semblables.

Exercices

Voir aussi les Questions FLASH dans le manuel numérique !

À l'oral !

1 Dans chaque cas ci-dessous, indique s'il semble exister une homothétie permettant de passer d'une voiture à l'autre.

a. 

b. 

c. 

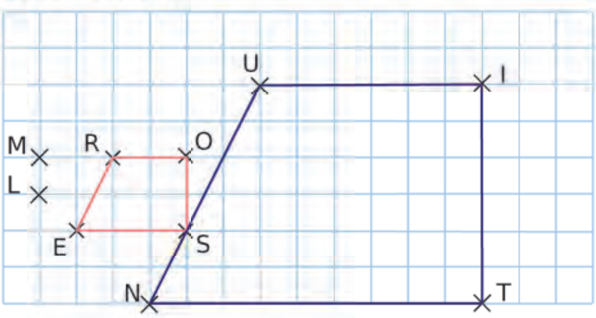
d. 

e. 

2 Par quelle homothétie...

a. le quadrilatère NUIT est-il l'image du quadrilatère ROSE ?

b. le quadrilatère ROSE est-il l'image du quadrilatère NUIT ?



3 Vrai ou Faux

P.1. Une homothétie de rapport $\frac{4}{3}$ est un agrandissement.

P.2. Par une homothétie de rapport 1, les points sont déplacés mais les dimensions sont conservées.

4 Le rectangle orange ci-dessous est l'image du rectangle rose par l'homothétie de centre O et de rapport 3.

a. Si le périmètre du rectangle rose est de 8 cm, quel est celui du rectangle orange ?

b. Si l'aire du rectangle orange est de 72 cm^2, quelle est celle du rectangle rose ?

5 QCM

a. Par une homothétie, l'image d'un carré...

R.1	R.2	R.3
est toujours un carré	est parfois un rectangle (non carré)	est parfois un quadrilatère (quelconque)

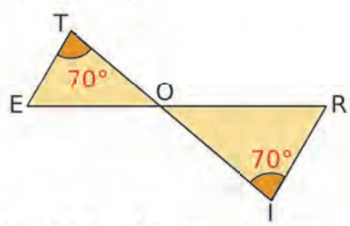
b. Par une homothétie de rapport 0,75, les longueurs sont...

R.1	R.2	R.3
réduites de 25 %	réduites de 75 %	augmentées de 75 %

c. Deux triangles isocèles...

R.1	R.2	R.3
ne sont jamais semblables	sont parfois semblables	sont toujours semblables

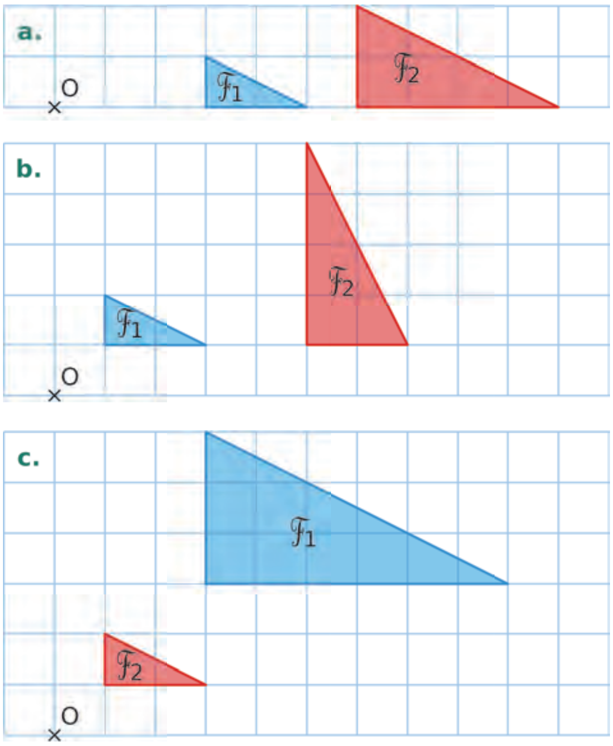
6 Sur la figure suivante, les droites (TI) et (ER) se coupent en O.



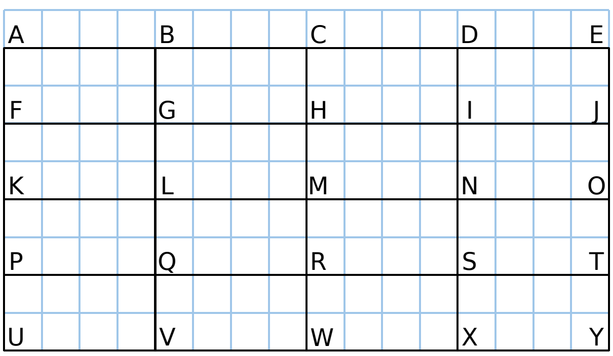
Les triangles OET et ORI sont-ils semblables ?

Définition de l'homothétie

7 Dans les cas ci-dessous, indique si la figure $\mathcal{F}_2$ est l'image de la figure $\mathcal{F}_1$ par une homothétie de centre O. Si oui, précise son rapport.



8 Recopie et complète les phrases suivantes.



a. L'image du rectangle BCHG par l'homothétie de centre A et de rapport 2 est...

b. L'image du rectangle HINM par l'homothétie de centre E et de rapport 2 est...

c. L'image du rectangle GHML par l'homothétie de centre G et de rapport 3 est...

d. L'image du rectangle GISQ par l'homothétie de centre M et de rapport 2 est...

e. L'image du rectangle MNSR par l'homothétie de centre S et de rapport 2 est...

9 On considère la figure de l'exercice **8**.

Le rectangle ADIF peut-il être l'image du rectangle ABGF par une homothétie ? Pourquoi ?

10 On considère la figure de l'exercice **8**.

a. Quelle est l'image du rectangle HJTR par l'homothétie de centre H et de rapport $\frac{1}{2}$?

b. ABGF est l'image du rectangle AEYU par une homothétie de centre A. Quel est le rapport de cette homothétie ?

c. Quelle est l'image du rectangle GJYV par l'homothétie de centre G et de rapport $\frac{1}{3}$?

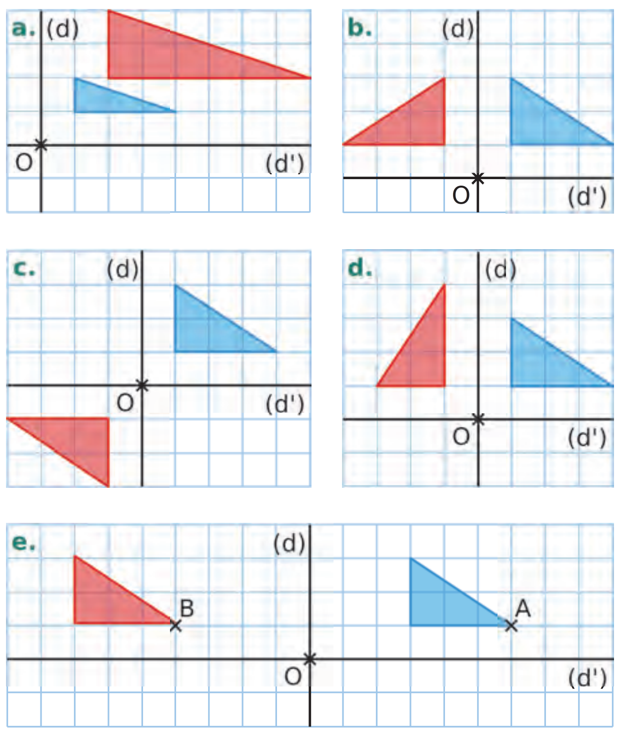
11 On considère la figure de l'exercice **8**.

a. Quelle est l'image du rectangle HINM par l'homothétie de centre M et de rapport 2 ?

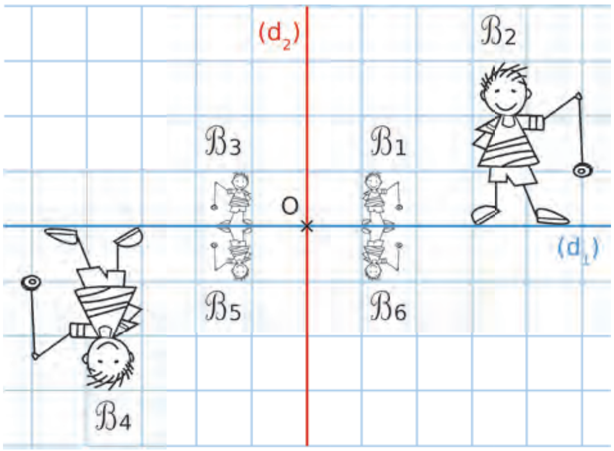
b. Quelle est l'image du rectangle HINM par l'homothétie de centre M et de rapport -2 ?

c. Quelle est l'image du rectangle DIJE par l'homothétie de centre I et de rapport -3 ?

12 Dans chaque cas ci-dessous, le triangle rouge est l'image du triangle bleu par une certaine transformation.
Précise cette transformation (symétrie axiale, symétrie centrale, translation, rotation, homothétie), ainsi que ses éléments caractéristiques (centre, axe, angle, rapport...).



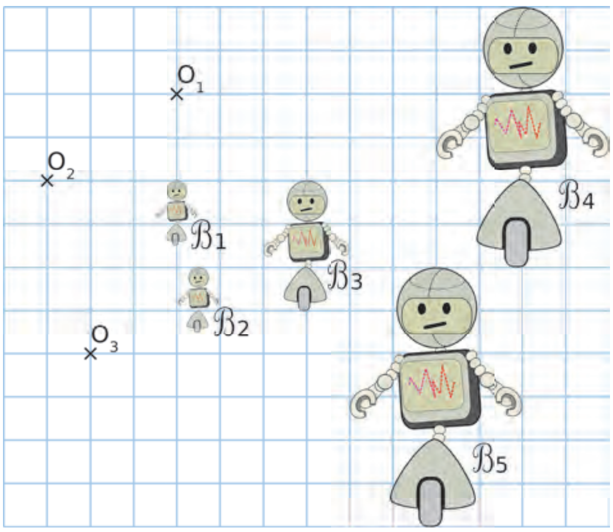
13 *La tête à l'envers !*



Précise la transformation qui transforme la figure $\mathcal{B}_1$ en la figure...

a. $\mathcal{B}_2$ **b.** $\mathcal{B}_3$ **c.** $\mathcal{B}_4$ **d.** $\mathcal{B}_5$ **e.** $\mathcal{B}_6$

14 QCM



a. $\mathcal{B}_3$ est l'image de $\mathcal{B}_1$ par l'homothétie...

R.1	R.2	R.3
de centre O_1 et de rapport 2	de centre O_2 et de rapport 2	de centre O_3 et de rapport 2

b. $\mathcal{B}_3$ est l'image de $\mathcal{B}_5$ par l'homothétie...

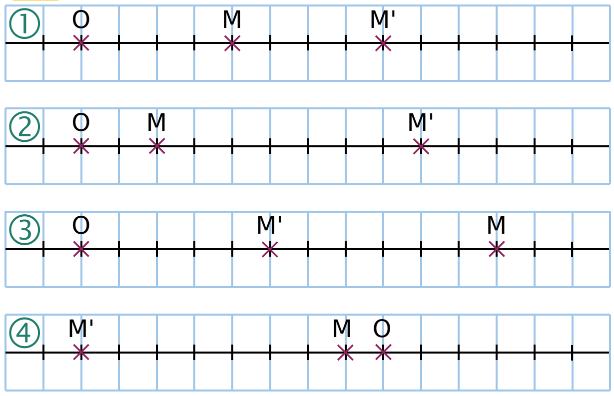
R.1	R.2	R.3
de centre O_1 et de rapport 2	de centre O_1 et de rapport $\frac{1}{2}$	de centre O_3 et de rapport 2

c. $\mathcal{B}_4$ est l'image de $\mathcal{B}_2$ par l'homothétie...

R.1	R.2	R.3
de centre O_3 et de rapport 2	de centre O_3 et de rapport 3	de centre O_3 et de rapport 4

Constructions

15 On considère les figures suivantes.



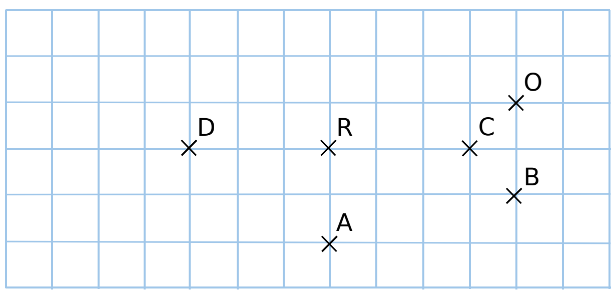
Dans chaque cas, précise le rapport de l'homothétie de centre O qui transforme M en M'.

16 Pour chaque cas ci-dessous, trace un axe gradué avec les points O, M et M' tels que M' soit l'image de M par une homothétie de centre O et...

a. de rapport 3 ;
b. de rapport 2,5 ;
c. de rapport $\frac{1}{3}$;
d. de rapport 0,75.

17 Reprends l'axe gradué de l'exercice **15** et place O, M et M' tels que M' soit l'image de M par une homothétie de centre O et de rapport − 2.

18 Reproduis la figure ci-dessous.



a. Construis le point A', image de A par l'homothétie de centre O et de rapport 2.

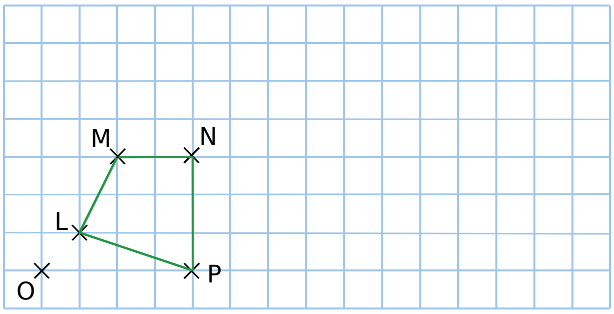
b. Construis le point B', image de B par l'homothétie de centre O et de rapport 1,5.

c. Construis le point C', image de C par l'homothétie de centre A et de rapport 3.

d. Construis le point D', image de D par l'homothétie de centre R et de rapport $\frac{2}{3}$.

e. A est-il l'image de C par l'homothétie de centre O et de rapport 2 ? Explique ta réponse.

19 Reproduis le quadrilatère suivant.



Construis l'image L'M'N'P' de ce quadrilatère par l'homothétie de centre O et de rapport 2.

20 Reproduis le quadrilatère de l'exercice précédent, puis construis son image $L_1M_1N_1P_1$ par l'homothétie de centre N et de rapport -2.

21 TICE Géométrie Dynamique

a. Affiche le repère. Nomme O son origine et place les points A(3 ; 3), B(4 ; 0), C(2 ; 0) et D(3 ; − 1).

b. Crée un curseur k variant de − 5 à 5.

c. Construis le quadrilatère ABCD, puis son image A'B'C'D' par l'homothétie de centre O et de rapport k.

d. Observe les coordonnées des sommets de ABCD et des sommets de A'B'C'D' lorsque $k = 3$. Que remarques-tu ? Ta remarque reste-t-elle valable pour d'autres valeurs de k ?

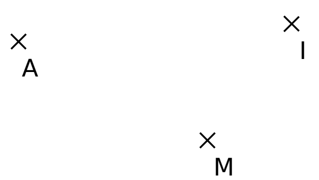
e. À ton avis, quelle valeur donner à k pour que D' ait pour coordonnées (7,5 ; − 2,5) ? Vérifie en déplaçant le curseur k.

f. Est-il possible que les points B' et C soient confondus ? Si oui, pour quelle valeur de k ?

g. Est-il possible que les points C' et B soient confondus ? Si oui, pour quelle valeur de k ?

h. Est-il possible que les points A' et A soient confondus ? Si oui, pour quelle valeur de k ?

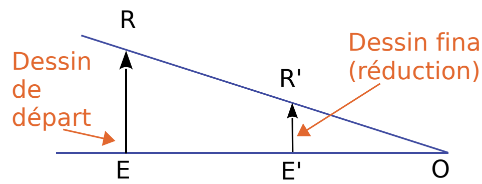
22 Reproduis sur papier blanc une figure similaire à celle ci-dessous. Construis, à l'aide d'une règle non graduée et d'un compas, les points A' et I', images respectives de A et I par l'homothétie de centre M et de rapport 3.



Propriétés

23 On considère une homothétie de centre O et de rapport k (k non nul). Quelle est l'image du point O ? Y a-t-il d'autres points dans ce cas ?

24 On veut réduire la hauteur de la flèche RE, à l'aide d'une homothétie.



a. Que doit vérifier le rapport de l'homothétie ?

On donne les dimensions suivantes : RE = 8 cm ; OE' = 9 cm ; EE' = 15 cm.

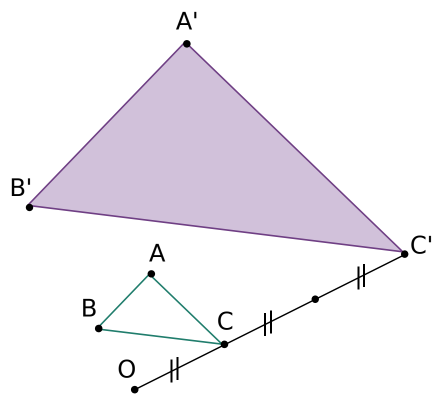
b. Quel est le rapport de l'homothétie ?

c. Calcule la longueur de la flèche réduite R'E'.

d. Justifie que les deux flèches sont parallèles.

e. Sur le même principe, quelle homothétie permettrait d'obtenir une flèche de longueur R''E'' = 2 cm ? À quelle distance de O serait alors placé le nouveau point E'' ?

25 Sur la figure suivante, ABC est un triangle rectangle en A, tel que AB = 6 cm et AC = 8 cm.



A'B'C' est l'image de ABC par une homothétie de centre O.

a. Donne, en justifiant, le rapport de cette homothétie.

b. Quelle est la nature du triangle A'B'C' ? Justifie.

c. Calcule le périmètre, puis l'aire du triangle ABC.

d. Déduis-en le périmètre, puis l'aire du triangle A'B'C'.

26 Voici les images des points d'une figure par une homothétie de rapport 4.

Point	F	A	C	I	L	E
Image	P	O	N	D	R	E

a. Quel est le centre de cette homothétie ? Pourquoi ?

b. Sachant que EF = 3 cm, que vaut EP ?

c. Sachant que DN = 6 cm, que vaut IC ?

d. On sait que $\widehat{CIL} = 50°$. Peux-tu en déduire la mesure d'un autre angle ? Justifie.

e. Le triangle LAC a pour aire 1,5 cm². Peux-tu en déduire l'aire d'un autre triangle ? Justifie.

27 QCM

a. Si un angle $\widehat{ABC}$ mesure 10°, alors son image par l'homothétie de centre B et de rapport 9 est un angle...

R.1	R.2	R.3
aigu	droit	obtus

b. Par une certaine homothétie, l'image d'un rectangle de dimensions 3 cm par 4 cm est un rectangle d'aire 48 cm². Le rapport de cette homothétie est...

R.1	R.2	R.3
2	4	$\frac{1}{4}$

c. Par une homothétie de rapport $\frac{1}{3}$, les aires sont...

R.1	R.2	R.3
multipliées par 3	divisées par 3	divisées par 9

28 TICE Géométrie Dynamique

a. Place un point O, puis construis le cercle (C) de centre O et de rayon 3.

b. Que dire de (C'), image de (C) par l'homothétie de centre O et de rapport 1,5 ? Construis (C').

c. Calcule le périmètre de (C), puis déduis-en celui de (C'). Vérifie à l'aide du logiciel.

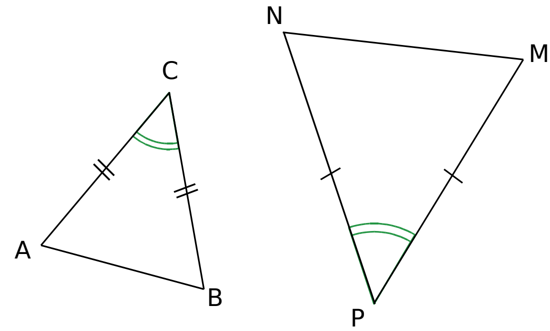
d. Place un point M quelconque, puis construis son image M' par l'homothétie de centre O et de rapport 1,5.

e. Que peux-tu dire du point M' lorsque M est un point du cercle (C) ? Pourquoi ?

f. Que dire du point M' lorsque OM > 3 ? Pourquoi ?

Triangles semblables

29 Les triangles ABC et MNP suivants sont-ils semblables ? Justifie.



30 On considère un triangle TED tel que : TE = 12, ED = 15 et DT = 18, et un triangle NOA tel que : NO = 16, OA = 20 et AN = 25.

Ces triangles sont-ils semblables ? Justifie.

31 On considère un triangle BUL, rectangle en B, tel que $\widehat{BUL} = 35°$, et un triangle GOM, rectangle en G, tel que $\widehat{GOM} = 55°$.

Ces triangles sont-ils semblables ? Justifie.

32 BUS est un triangle tel que : BU = 4 cm, US = 5 cm et SB = 6 cm. CAR est un triangle semblable au triangle BUS.

a. Est-il possible que les dimensions du triangle CAR soient 8 cm, 9 cm et 10 cm ?

b. On suppose que CA = 12 cm. Combien peuvent alors mesurer [AR] et [BC] ? Donne plusieurs possibilités.

33 SUD est un triangle tel que : SU = 3 cm, UD = 4 cm et DS = 5 cm.

a. Construis SUD, ainsi que plusieurs triangles qui lui sont semblables.

b. Que peux-tu dire de tous ces triangles ? Pourquoi ?

c. Propose une méthode permettant de construire très rapidement un grand nombre de triangles semblables au triangle SUD.

34 Vrai ou Faux

P.1. Si deux triangles sont semblables, alors ils sont isométriques.

P.2. Si deux triangles sont rectangles, alors ils sont semblables.

35 **TICE Géométrie Dynamique**

a. Place deux points distincts A et B.

b. Construis un hexagone régulier ABCDEF.

c. Crée un curseur k variant de 1 à 8, avec un pas de 1. Place k sur la valeur 1.

d. Construis l'image de l'hexagone ABCDEF par l'homothétie de centre A et de rapport k. Demande l'affichage de sa trace.

e. Déplace alors le curseur k de 1 à 8.

f. C'est à ton tour de créer des figures analogues, en variant le polygone de départ, le centre de l'homothétie... et les couleurs !

36 **TICE Géométrie Dynamique**

a. Construis un cercle C_1 de centre A et de rayon 2, puis un cercle C_2 de centre A' et de rayon 5.

Le but de l'exercice est de déterminer une (ou des) homothétie(s) qui transforme(nt) C_1 en C_2.

b. Quel peut être le rapport d'une de ces homothéties ? Explique.

c. Soit O le centre d'une telle homothétie. Justifie que O appartient nécessairement à la droite (AA').

d. Construis un rayon [AM] de C_1. Démontre que l'image de [AM] est un rayon [A'M'] de C_2 parallèle à [AM].

e. Combien de tels points M' peut-on construire ?

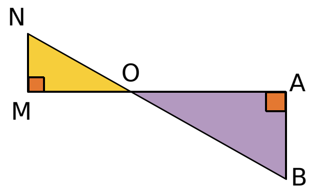
f. Construis alors, pour chacun d'eux, le point O correspondant.

g. Conclus. Précise quelles homothéties transforment C_1 en C_2.

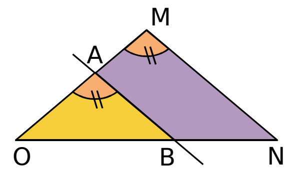
h. Vérifie à l'aide du logiciel.

37 Pour chaque figure ci-dessous, les points O, A et M sont alignés, ainsi que les points O, B et N. Indique si les triangles OMN et OAB sont semblables ou non. Justifie ta réponse.

a.



b.



38 **Vrai ou Faux**

P.1. Si M' est le milieu de [OM], alors M' est l'image de M par l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{2}$.

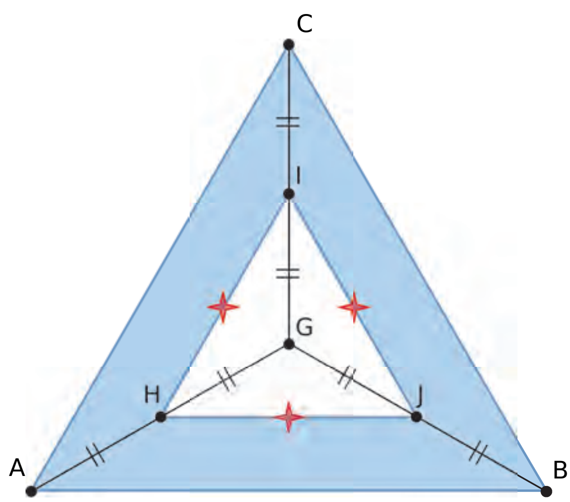
P.2. Si M' est l'image de M par l'homothétie de centre O et de rapport 3, alors M est situé au tiers du segment [OM'] en partant de O.

P.3. Si OM' = 5 × OM, alors M' est l'image de M par l'homothétie de centre O et de rapport 5.

P.4. Par une homothétie de rapport négatif, l'image d'une figure est une réduction de celle-ci.

P.5. Si deux triangles sont isométriques, alors ils sont semblables.

39 ***« Couronne » triangulaire***



Sur la figure ci-dessus, BAC est un triangle équilatéral d'aire 20 cm², I est le milieu du segment [CG], J est le milieu du segment [BG], et H est le milieu du segment [AG].

Détermine l'aire de la surface colorée sur la figure. Tu détailleras clairement les différentes étapes de ton raisonnement.

Tirages photos

Johan souhaite commander des tirages de sa photo préférée. La photo originale a été prise en mode « portrait » et a pour dimensions 20 cm × 30 cm.

Sur son site, un photographe propose des tirages de différents formats.

Format	Carte postale	Classique	Set de table	Poster	Affiche
Dimensions (cm)	10 × 15	20 × 30	30 × 45	40 × 60	50 × 75

TICE Géométrie Dynamique

a. Avec un logiciel de géométrie dynamique, affiche le repère, nomme O son origine.
Crée un curseur k variant de 0 à 5, avec un pas de 0,01.
Trace un rectangle OABC, représentant la photo de Johan. (Pense à régler convenablement l'affichage de la fenêtre *Graphique*.)

b. Construis l'image du rectangle OABC par l'homothétie de centre O et de rapport k. L'image construite représente le tirage de la photo de Johan. Comment régler k pour que le tirage corresponde à un agrandissement de la photo originale ? À une réduction de la photo originale ?

c. Supposons maintenant que le nombre k vaut 2.
À quel format correspond le tirage lorsque $k = 2$?
En observant les figures, que peux-tu dire de l'aire de la photo reproduite, par rapport à celle de la photo originale ?
Quel est le pourcentage de surface supplémentaire sur ce tirage, par rapport à l'original ?

d. Quelle valeur faut-il donner à k pour que le tirage soit au format « Carte postale » ?
En observant les figures, que peux-tu dire de l'aire de la photo reproduite, par rapport à celle de la photo originale ?
Quel est le pourcentage de surface en moins sur ce tirage, par rapport à l'original ?

e. Règle le curseur k pour afficher le tirage au format « Set de table ». Sur ce tirage, quel est le pourcentage de surface supplémentaire, par rapport à l'original ?

f. Même question, pour le format « Affiche ».

g. Finalement, Johan se rend dans un labo photo. Deux formats supplémentaires lui sont proposés : le format « Moderne » (15 cm × 21 cm) et le format « Méga-poster » (76 cm × 114 cm).

« *— Le format « Moderne » me tente assez, mais ma photo risque d'être coupée !*

— Rassurez-vous, elle ne sera pas coupée, mais il y aura de légères bandes blanches. »

Explique la crainte de Johan et la réponse du photographe.

h. « *— Le format « Méga-poster » impressionnera vos amis : c'est comme si vous assembliez une quinzaine de photos identiques à votre original !* »
L'affirmation du photographe est-elle correcte ? Explique.

G3

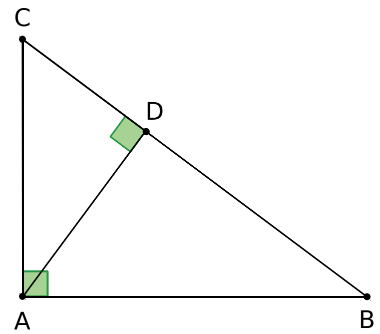
Trigonométrie

Activités

1 Vocabulaire

→ Cours : 1-A

Dans un triangle rectangle, le côté opposé à un angle aigu est le côté joignant le sommet de l'angle droit au sommet de l'autre angle aigu.



a Précise les hypoténuses des différents triangles rectangles.

b Précise le côté adjacent de l'angle $\widehat{ACB}$ dans le triangle ABC, puis dans le triangle ADC.

c Précise le côté adjacent de l'angle $\widehat{ABD}$ dans le triangle ABC, puis dans le triangle ABD.

d Précise le côté opposé de l'angle $\widehat{ACB}$ dans le triangle ABC, puis dans le triangle ADC.

e Précise le côté opposé de l'angle $\widehat{ABD}$ dans le triangle ABC, puis dans le triangle ABD.

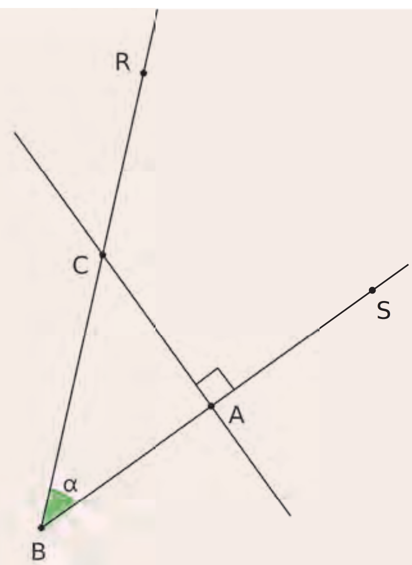
2 Une nouvelle égalité

→ Cours : 1-A

TICE Géométrie Dynamique

a Construis la figure suivante.

- Trace deux demi-droites, [BR) et [BS), telles que l'angle $\widehat{SBR} = \alpha$ est aigu ;
- Place un point C quelconque sur la demi-droite [BR) ;
- Trace la perpendiculaire à [BS) passant par C. Elle coupe la demi-droite [BS) en A. Place le point A.



b Affiche les longueurs BC, AB et AC.

c Calcule et affiche le rapport $\frac{BA}{BC}$.

Calcule le cosinus de l'angle α.

d Calcule et affiche le rapport $\frac{AC}{BC}$.

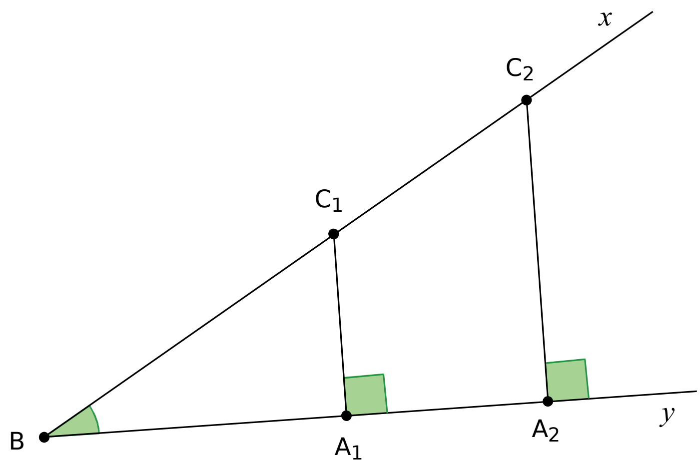
Calcule le sinus de l'angle α.

e Déplace le point R, déplace le point C. Que remarques-tu ?

f ABC est un triangle rectangle en A. Quelle nouvelle égalité, liant la longueur de l'hypoténuse, le sinus et la longueur d'un côté opposé, peux-tu conjecturer ?

3 Démonstration

Cours : 1A



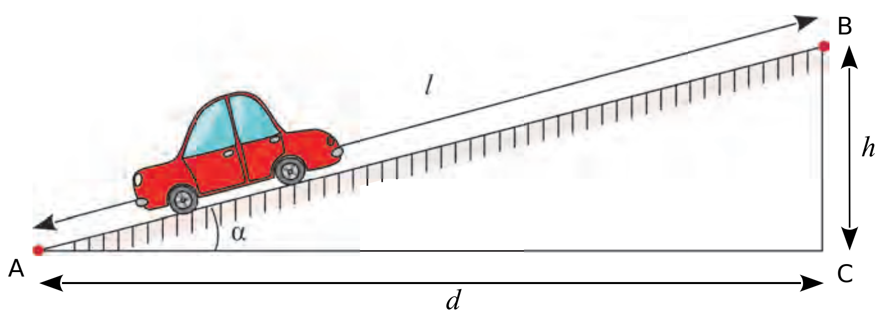
a Démontre que $\dfrac{C_1A_1}{C_2A_2} = \dfrac{BC_1}{BC_2}$.

b Comment peux-tu en déduire que $\dfrac{C_1A_1}{BC_1} = \dfrac{C_2A_2}{BC_2}$?

c De quoi dépend ce rapport ?

4 Sur une mauvaise pente...

Cours : 2



La pente d'une route joignant un point A à un point B est le rapport entre le dénivelé h et la distance horizontale parcourue d.

a Fais une figure représentant une pente de 10 %.

b Dans le triangle rectangle ABC, exprime cos α, sin α, puis $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$. Que remarques-tu ?

c La calculatrice permet de calculer $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ directement, en tapant : tan α.
Dans le triangle rectangle ABC, quelle est la valeur de tan α ?

d Sur une route, la pente est de 6 %. La distance horizontale parcourue est de 200 m.
Quel dénivelé correspondant à ce trajet ?

e Sur une autre route, la pente est de 8 % et le dénivelé est de 160 m.
Quelle est la pente correspondante ?

1 Cosinus, sinus et tangente

A Définitions

→ 12 17

Définitions Dans un **triangle rectangle**,

- le **sinus d'un angle aigu** est le quotient de la longueur du côté opposé à cet angle par la longueur de l'hypoténuse ;
- le **cosinus d'un angle aigu** est le quotient de la longueur du côté adjacent à cet angle par la longueur de l'hypoténuse ;
- la **tangente d'un angle aigu** est le quotient de la longueur du côté opposé à cet angle par la longueur du côté adjacent à cet angle.

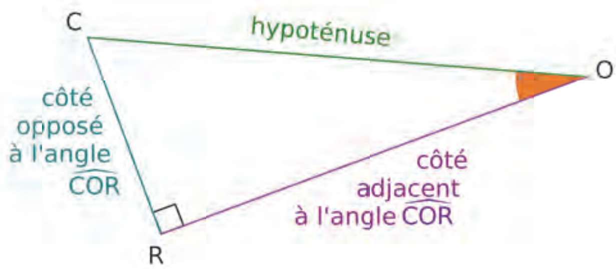
Exemple :

Le triangle COR est rectangle en R.

$\textbf{S}\text{in } \widehat{COR} = \dfrac{\text{côté } \textbf{O}\text{pposé à } \widehat{COR}}{\textbf{H}\text{ypoténuse}} = \dfrac{RC}{CO}$

$\textbf{C}\text{os } \widehat{COR} = \dfrac{\text{côté } \textbf{A}\text{djacent à } \widehat{COR}}{\textbf{H}\text{ypoténuse}} = \dfrac{RO}{CO}$

$\textbf{T}\text{an } \widehat{COR} = \dfrac{\text{côté } \textbf{O}\text{pposé à } \widehat{COR}}{\text{côté } \textbf{A}\text{djacent à } \widehat{COR}} = \dfrac{RC}{RO}$



Remarques :

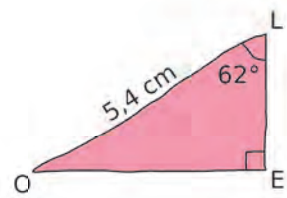
- Pour retenir facilement ces formules, on peut utiliser le moyen mnémotechnique suivant : SOH – CAH – TOA qui correspond aux initiales en gras dans les formules précédentes.
- Le cosinus et le sinus d'un angle aigu sont toujours compris entre 0 et 1.
- La tangente d'un angle aigu est un nombre strictement positif.

B Applications

→ 33 38

Exemple 1 :

Dans le triangle LEO rectangle en E, on connait la longueur LO et la mesure de l'angle $\widehat{ELO}$.
On veut calculer la longueur du segment [OE], puis celle du segment [EL].



Dans le triangle LEO rectangle en E, [LO] est l'hypoténuse ; [OE] est le côté opposé à l'angle $\widehat{ELO}$.	→	On cite les données de l'énoncé qui permettent de choisir la relation trigonométrique à utiliser. On doit utiliser le sinus de l'angle $\widehat{ELO}$.
$\sin \widehat{ELO} = \dfrac{\text{côté opposé à } \widehat{ELO}}{\text{hypoténuse}}$	→	On écrit le sinus de l'angle connu.
$\sin \widehat{ELO} = \dfrac{OE}{LO}$	→	La longueur cherchée OE doit apparaitre dans le rapport.
$OE = LO \times \sin \widehat{ELO}$	→	On applique la règle des produits en croix.
$OE = 5{,}4 \times \sin 62°$	→	On saisit 5,4 × sin 62 à la calculatrice.
$OE \approx 4{,}8$ cm	→	OE est inférieur à LO. Le résultat est cohérent.

Pour calculer la longueur du segment [EL], on peut utiliser deux méthodes différentes.

Première méthode : On utilise le théorème de Pythagore dans le triangle LEO rectangle en E.

$LO^2 = OE^2 + EL^2$

$5{,}4^2 \approx 4{,}8^2 + EL^2$

$EL^2 \approx 5{,}4^2 - 4{,}8^2 \approx 6{,}12$

$EL \approx \sqrt{6{,}12}$ donc $EL \approx 2{,}5$ cm

Deuxième méthode : On utilise une deuxième relation trigonométrique.

Dans le triangle LEO rectangle en E,
[LO] est l'hypoténuse
[EL] est le côté adjacent à l'angle $\widehat{ELO}$
⟶ On cite les données de l'énoncé qui permettent de choisir la relation trigonométrique à utiliser.
On doit utiliser le cosinus de $\widehat{ELO}$.

$\cos \widehat{ELO} = \dfrac{\text{côté adjacent à } \widehat{ELO}}{\text{hypoténuse}}$ ⟶ On écrit le cosinus de l'angle connu.

$\cos \widehat{ELO} = \dfrac{EL}{LO}$ ⟶ La longueur cherchée doit apparaitre dans le rapport.

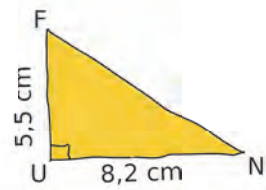
$EL = LO \times \cos \widehat{ELO}$ ⟶ On applique la règle des produits en croix.

$EL = 5{,}4 \times \cos 62°$ ⟶ On saisit 5,4 × cos (arccos) 62 à la calculatrice

$EL \approx 2{,}5$ cm ⟶ EL est inférieur à LO. Le résultat est cohérent.

Exemple 2 :

Dans le triangle FUN rectangle en U, on connait les longueurs FU et UN.
On veut calculer la mesure de l'angle $\widehat{UNF}$, arrondie au degré.



Dans le triangle FUN rectangle en U,
[FU] est le côté opposé à l'angle $\widehat{UNF}$
[UN] est le côté adjacent à l'angle $\widehat{UNF}$
⟶ On cite les données de l'énoncé qui permettent de choisir la relation trigonométrique à utiliser.
On doit utiliser la tangente de $\widehat{UNF}$.

$\tan \widehat{UNF} = \dfrac{\text{côté opposé à } \widehat{UNF}}{\text{côté adjacent à } \widehat{UNF}}$ ⟶ On écrit la tangente de l'angle recherché.

$\tan \widehat{UNF} = \dfrac{UF}{UN}$

$\tan \widehat{UNF} = \dfrac{5{,}5}{8{,}2}$ ⟶ On saisit 2nde puis tan (arctan) (5,5 ÷ 8,2) selon le modèle de calculatrice.

$\widehat{UNF} \approx 34°$ ⟶ On arrondit à l'unité.

2 Relations trigonométriques

Propriétés

Pour tout angle aigu $\hat{A}$, $(\cos \hat{A})^2 + (\sin \hat{A})^2 = 1$ et $\tan \hat{A} = \dfrac{\sin \hat{A}}{\cos \hat{A}}$.

Exemple :

On sait que $\cos \hat{A} = 0{,}8$. Grâce à ces formules, on peut en déduire $\sin \hat{A}$, puis $\tan \hat{A}$.

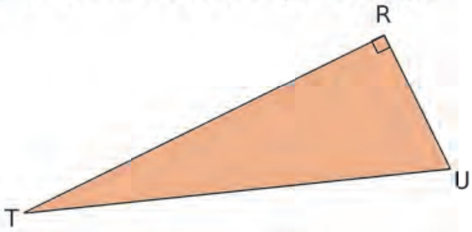
- $\cos^2 \hat{A} + \sin^2 \hat{A} = 1$, donc $\sin^2 \hat{A} = 1 - \cos^2 \hat{A} = 1 - 0{,}8^2 = 1 - 0{,}64 = 0{,}36$
  Le sinus d'un angle aigu est un nombre positif, donc $\sin \hat{A} = \sqrt{0{,}36} = 0{,}6$.
- $\tan \hat{A} = \dfrac{\sin \hat{A}}{\cos \hat{A}} = \dfrac{0{,}6}{0{,}8} = 0{,}75$

Exercices

À l'oral !

Voir aussi les Questions FLASH dans le manuel numérique !

1 On considère ce triangle rectangle.

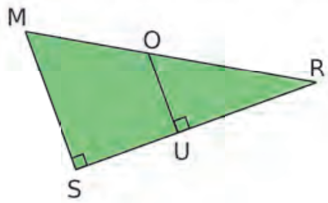


a. Quelle est son hypoténuse ?

b. Quel est le côté adjacent à l'angle $\widehat{TUR}$?

c. Quel est le côté opposé à l'angle $\widehat{RTU}$?

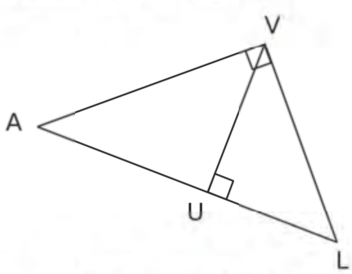
2 Pour chaque triangle rectangle ci-dessous, énonce deux phrases avec l'expression « côté adjacent », et deux autres avec « côté opposé ».



3 Soit EDP un triangle rectangle en P. Associe les expressions égales.

$\cos \widehat{EDP}$	$\frac{DP}{DE}$	$\frac{DE}{DP}$	$\frac{EP}{ED}$
$\frac{DP}{PE}$	$\tan \widehat{EDP}$	$\frac{DE}{EP}$	$\sin \widehat{DEP}$
$\frac{EP}{DP}$	$\tan \widehat{DEP}$		

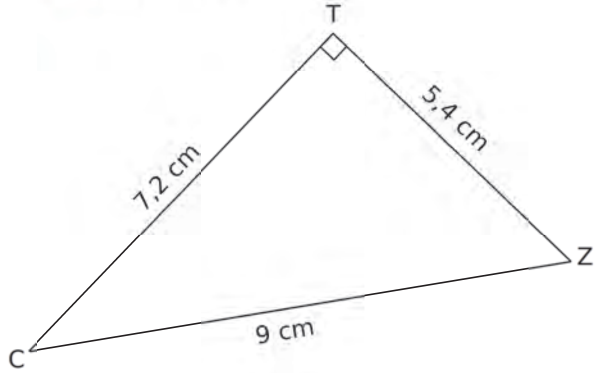
4 On considère cette figure.



Exprime de deux façons différentes :

a. $\sin \widehat{VLA}$; **b.** $\tan \widehat{VAL}$.

5 On considère cette figure.



a. Combien valent $\sin \widehat{TCZ}$ et $\tan \widehat{TZC}$?

b. Donne une mesure, arrondie au degré, des deux angles aigus de ce triangle.

6 Sachant que :

$\cos 25° \approx 0{,}91$ $\cos 71° \approx 0{,}33$

$\sin 25° \approx 0{,}42$ $\sin 71° \approx 0{,}95$

Compare à 1 les nombres $\tan 25°$ et $\tan 71°$ sans faire aucun calcul. Explique.

7 MVS est un triangle rectangle en S, tel que $\widehat{SVM} = 33°$ et VM = 3 cm. Donne une expression pour calculer directement SM.

8 Soit PIC un triangle rectangle isocèle en I, tel que PI = 5 cm. Donne une expression pour calculer directement $\widehat{PCI}$.

9 **Vrai ou Faux**

P.1. Si RUM est rectangle en U, alors le côté opposé à $\widehat{MRU}$ est [UM].

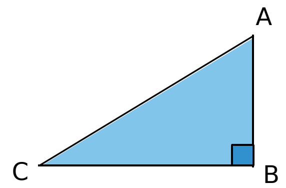
P.2. Il existe des angles dont la tangente est supérieure à 10 000.

P.3. Si le triangle GIV est rectangle en V, alors $\tan \widehat{GIV} = \frac{GV}{GI}$.

P.4. Quel que soit l'angle aigu $\hat{a}$, on a la relation $\cos \hat{a} + \sin \hat{a} = 1$.

Vocabulaire

10 Soit ABC un triangle rectangle en B.



a. Quelle est son hypoténuse ?

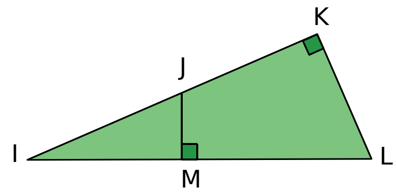
b. Quel est le côté opposé à l'angle $\widehat{ACB}$?

c. Quel est le côté adjacent à l'angle $\widehat{ACB}$?

d. Quel est le côté opposé à l'angle $\widehat{CAB}$?

e. Quel est le côté adjacent à l'angle $\widehat{BAC}$?

11 ***Le bon triangle***



Soit le triangle IKL rectangle en K.

a. Quelle est son hypoténuse ?

b. Quel est le côté opposé à l'angle $\widehat{KLI}$?

c. Quel est le côté opposé à l'angle $\widehat{KIL}$?

On se place dans le triangle IJM rectangle en M.

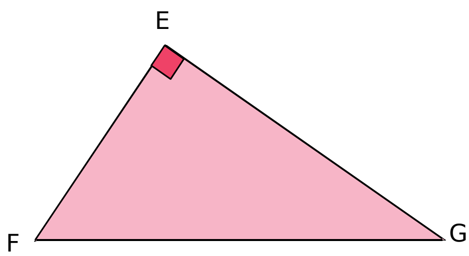
d. Quelle est son hypoténuse ?

e. Quel est le côté opposé à l'angle $\widehat{JIM}$?

12 BON est un triangle rectangle en O.

Nomme son hypoténuse, le côté opposé à l'angle $\widehat{BNO}$ et le côté adjacent à l'angle $\widehat{BNO}$.

13 EFG est un triangle rectangle en E.

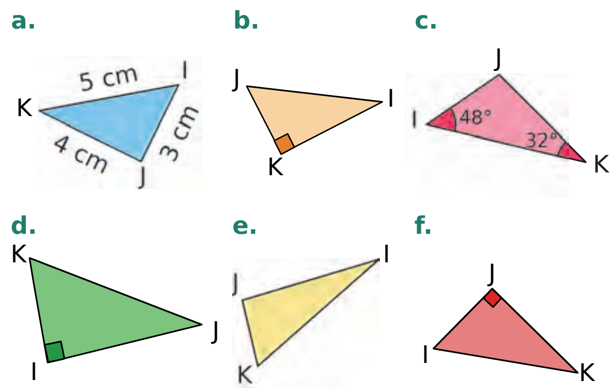


Écris les relations donnant le sinus, le cosinus et la tangente de l'angle $\widehat{EGF}$ dans le triangle EFG.

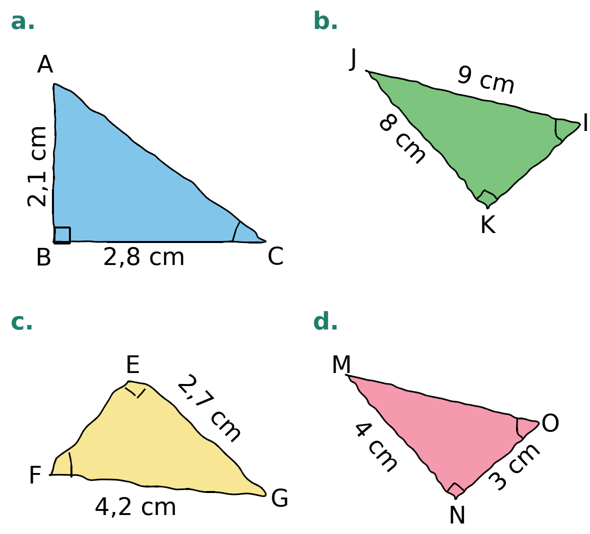
14 AMI est un triangle rectangle en I.

Écris les relations donnant le sinus, le cosinus et la tangente de l'angle $\widehat{AMI}$ dans ce triangle.

15 Dans quel(s) triangle(s) peut-on écrire que $\sin \widehat{IKJ} = \dfrac{IJ}{IK}$? Justifie.



16 Indique pour chaque figure à main levée ci-dessous, si, à l'aide des données, on peut calculer le sinus, le cosinus ou la tangente de l'angle aigu marqué.

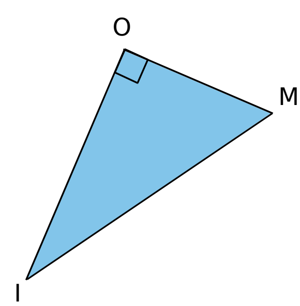


17 MOI est un triangle rectangle en O.

Que calcules-tu lorsque tu écris :

a. $\dfrac{OI}{MI}$? **b.** $\dfrac{OI}{MO}$?

c. $\dfrac{MO}{OI}$? **d.** $\dfrac{MO}{MI}$?



Il peut y avoir plusieurs réponses possibles. Pour chaque réponse, précise l'angle.

18 À l'aide de la calculatrice, donne la valeur, arrondie au centième, des nombres suivants.

a. sin 75° **b.** cos 26° **c.** tan 83° **d.** sin 18°

19 Donne la valeur de x, arrondie au degré.

a. $\sin x = 0{,}24$ **b.** $\tan x = 52$ **c.** $\cos x = 0{,}75$

d. $\tan x = \dfrac{7}{2}$ **e.** $\cos x = \dfrac{2}{3}$ **f.** $\sin x = \dfrac{9}{10}$

20 Recopie et complète le tableau suivant avec des arrondis au dixième.

Mesure de l'angle	Sinus	Cosinus	Tangente
35°			
	0,5		
89°			
		0,33	
			7

21 Calcule x dans chacun des cas suivants.

a. $\dfrac{x}{5{,}5} = 0{,}6$ **b.** $\dfrac{13}{x} = 0{,}25$ **c.** $0{,}8 = \dfrac{36}{x}$

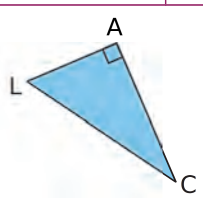
22 QCM

a. KDC est rectangle en K, donc [KC] est le côté...

R.1	R.2	R.3
opposé à $\widehat{KCD}$	opposé à $\widehat{KDC}$	adjacent à $\widehat{KDC}$

b. PUR est rectangle en R, donc $\tan \widehat{RUP} =$

R.1	R.2	R.3
$\dfrac{PU}{PR}$	$\dfrac{PR}{PU}$	$\dfrac{PR}{RU}$



c. $\dfrac{LA}{LC} =$

R.1	R.2	R.3
$\cos \widehat{ACL}$	$\sin \widehat{ACL}$	$\tan \widehat{ACL}$

d. 1,5 peut être...

R.1	R.2	R.3
le cosinus d'un angle	la tangente d'un angle	le sinus d'un angle

Calculs de longueurs

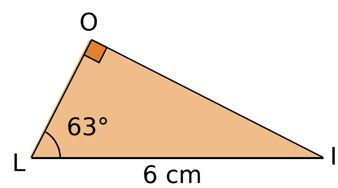
23 ***La bonne relation***

BON est un triangle rectangle en B tel que : $\widehat{BNO} = 30°$.

Associe chacune des étiquettes à une de ces longueurs : BO, ON et BN.

$\dfrac{BN}{\cos 30°}$ | $\cos 30° \times ON$ | $\dfrac{BO}{\tan 30°}$ | $\tan 30° \times BN$ | $\sin 30° \times ON$ | $\dfrac{BO}{\sin 30°}$

24 ***Calcul de la longueur d'un côté***



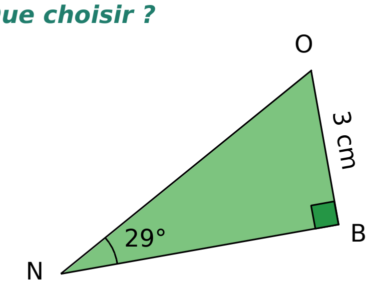
a. Exprime le cosinus de l'angle $\widehat{OLI}$ en fonction des longueurs des côtés du triangle.

b. Quelle longueur peux-tu calculer à l'aide de ce cosinus ? Calcule l'arrondi au dixième de cette longueur.

c. Exprime le sinus de l'angle $\widehat{OLI}$ en fonction des longueurs des côtés du triangle.

d. Quelle longueur peux-tu calculer à l'aide de ce sinus ? Calcule l'arrondi au dixième de cette longueur.

25 ***Que choisir ?***



a. Quelle relation trigonométrique dois-tu utiliser pour calculer BN ?

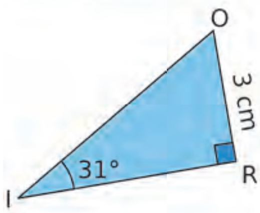
b. Calcule l'arrondi au dixième de cette longueur.

26 KOA est un triangle rectangle en A tel que : AK = 5 cm et $\widehat{AKO} = 40°$.

a. Fais une figure en vraie grandeur.

b. Calcule la longueur OA, arrondie au mm.

27 ***Calcul de la longueur de l'hypoténuse***



a. Exprime le sinus de l'angle $\widehat{RIO}$ en fonction des longueurs des côtés du triangle.

b. Déduis-en la valeur, arrondie au dixième, de l'hypoténuse du triangle RIO.

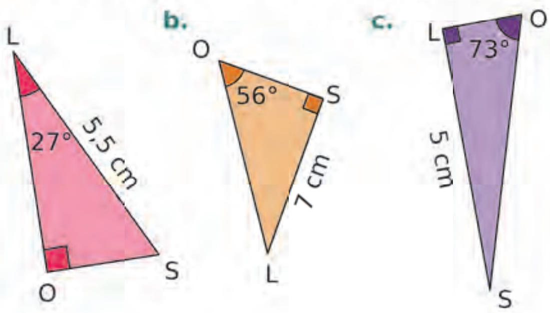
28 TOY est un triangle rectangle en O tel que TO = 4,5 cm et $\widehat{YTO}$ = 73°.

a. Fais une figure en vraie grandeur.

b. Calcule la longueur TY arrondie au mm.

29 Dans chaque cas ci-dessous, calcule la valeur, arrondie au dixième, de la longueur SO.

a. **b.** **c.**



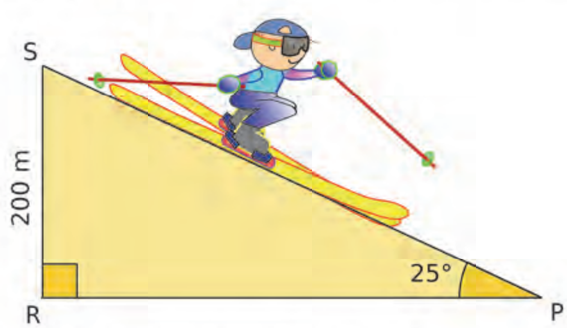
30 **Vrai ou Faux**

Pour les deux affirmations qui suivent, RAT est un triangle rectangle en T tel que $\widehat{RAT} = 56°$ et RT = 2,7 cm.

P.1. [TR] est le côté le plus court du triangle.

P.2. Le périmètre de RAT vaut environ 7,8 cm.

31 Un skieur descend une piste noire ayant une pente de 25°. Des fanions sont plantés aux positions S et P de la piste.

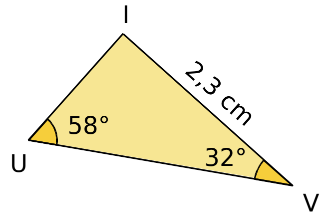


Calcule la distance entre les deux fanions S et P, arrondie au dixième de mètre.

32 On considère ce triangle.

a. Démontre qu'il est rectangle.

b. Calcule les longueurs IU et UV arrondies au dixième.



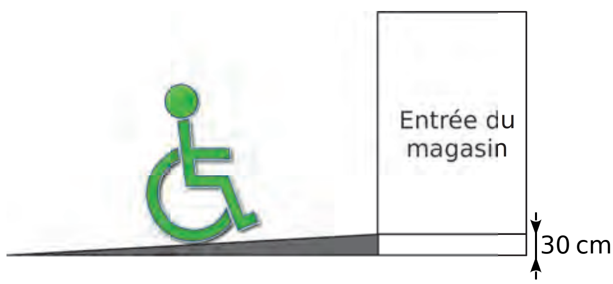
33 Construis un triangle ABC tel que : AB = 4,5 cm, $\widehat{BAC}$ = 23° et $\widehat{CBA}$ = 67°.

a. Ce triangle est-il rectangle ? Pourquoi ?

b. Calcule AC et BC. Arrondis au dixième.

34 ***Rampe d'accès***

Un vendeur souhaite rendre son magasin plus accessible aux personnes à mobilité réduite. Pour cela, il s'est renseigné sur les normes et a décidé d'installer une rampe d'accès avec une pente de 3°, comme sur ce schéma :



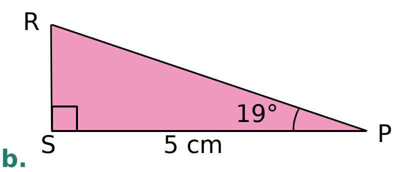
À quelle distance du magasin, arrondie au centimètre, faut-il positionner la rampe ?

35 **QCM**

a. Si $\sin 83° = \dfrac{2,1}{ET}$, alors ET =

R.1	R.2	R.3
$2,1 \times \sin 83°$	$\dfrac{2,1}{\sin 83°}$	$\dfrac{83}{\sin 2,1°}$

b.



RP ≈ ...

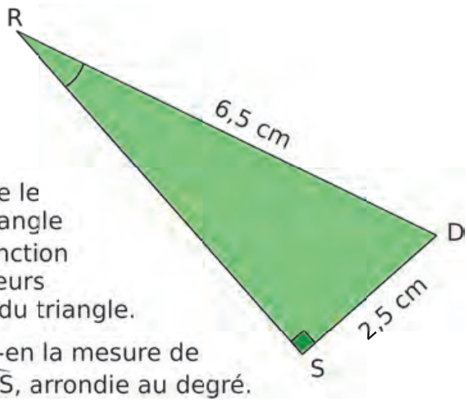
R.1	R.2	R.3
15,4 cm	4,7 cm	5,3 cm

c. On reprend la figure précédente. RS =

R.1	R.2	R.3
$5 \times \sin 19°$	$\dfrac{5}{\tan 19°}$	$5 \times \tan 19°$

Calculs d'angles

36 Soit RDS un triangle rectangle en S.

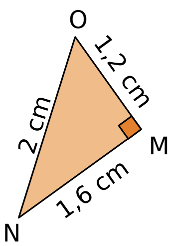


a. Exprime le sinus de l'angle $\widehat{DRS}$ en fonction des longueurs des côtés du triangle.

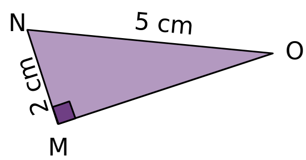
b. Déduis-en la mesure de l'angle $\widehat{DRS}$, arrondie au degré.

37 Dans chaque cas ci-dessous, calcule la mesure de l'angle $\widehat{MNO}$, et donne sa valeur arrondie au degré.

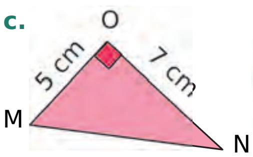
a.



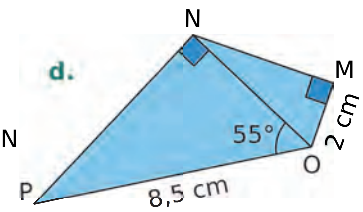
b.



c.



d.



38 UVB est un triangle rectangle en B, tel que BV = 2 cm et UV = 3,5 cm.

Calcule la mesure, arrondie au degré, de chacun des angles de ce triangle.

39 MOI est un triangle tel que MO = 5 cm, OI = 12 cm et IM = 13 cm.

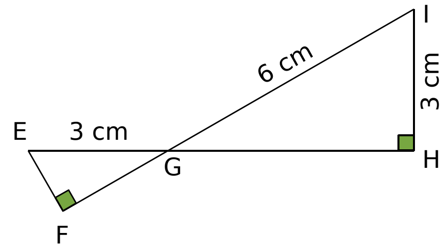
a. Ce triangle est-il rectangle ? Justifie.

b. Calcule la mesure, arrondie au degré, de chacun des angles de ce triangle.

40 BIEN est un losange de centre O, tel que IN = 7 cm et BE = 4 cm.

Calcule la mesure, arrondie au degré, de chacun des angles de ce losange.

41 ***Triangles croisés***

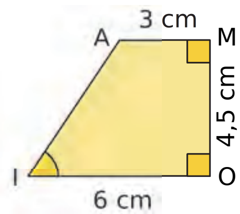


a. Reproduis la figure ci-dessus en vraie grandeur. Laisse les traits de construction apparents.

b. Démontre que les triangles GIH et EFG sont semblables.

c. Déduis-en la mesure de tous les angles présents sur la figure.

42 ***Dans un trapèze rectangle***



À l'aide des informations figurant ci-dessus, calcule la mesure, arrondie au degré, de l'angle $\widehat{AIO}$.

43 **QCM**

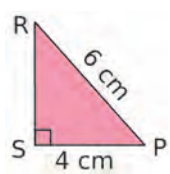
a. Si $\widehat{GEL} = 50°$, alors $\tan \widehat{GEL} \approx$

R.1	R.2	R.3
50	1,19	88,85

b. Si $\tan \widehat{MIK} = 58$, alors $\widehat{MIK} \approx$

R.1	R.2	R.3
58°	89°	1,6°

c.



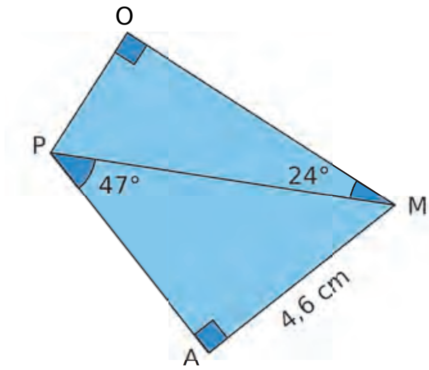
$\widehat{SRP} \approx$

R.1	R.2	R.3
42°	48°	90°

44 ***Triangle isocèle***

MAI est un triangle isocèle en A, tel que MI = 5 cm. La hauteur [AH] mesure 3 cm.
Calcule la mesure, arrondie au degré, de chacun des angles de ce triangle.

45 ***Avec deux triangles***



a. Calcule la longueur OM arrondie au millimètre.

b. Calcule le périmètre, puis l'aire du quadrilatère PAMO. (Arrondis au dixième d'unité.)

46 MNOP est un rectangle de longueur MN = 18 cm et de largeur MP = 7,5 cm.

a. Calcule la mesure de l'angle $\widehat{OMN}$, arrondie au degré.

b. Calcule la longueur de la diagonale de ce rectangle, arrondie au millimètre.

c. Soit H le pied de la hauteur issue de N dans le triangle MNO. Calcule la longueur NH, arrondie au millimètre.

47 Dans chaque cas ci-dessous, construis, si possible, un triangle vérifiant les conditions imposées. Sinon, explique pourquoi la construction est impossible.

a. PLI, rectangle en P, tel que $\sin \widehat{PIL} = \frac{3}{5}$.

b. FER, rectangle en F, tel que $\tan \widehat{FRE} = 0{,}75$.

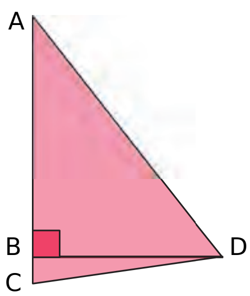
c. VMC, rectangle en V, tel que $\sin \widehat{VMC} = \frac{7}{4}$.

d. ARF, rectangle en A, tel que $\cos \widehat{FAR} = 0{,}8$.

e. SAC, rectangle en A, tel que $\cos \widehat{SCA} = \frac{10}{15}$.

f. TOP, rectangle en T, tel que $\tan \widehat{TOP} = 5{,}5$.

48 Observe le dessin ci-dessous.



On a $\widehat{ADB} = 52°$;
BD = 20 dm
et $\widehat{BDC} = 8°$.

Calcule le périmètre du triangle ACD, arrondi au décimètre.

49 **TICE Géométrie Dynamique**

À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, construis la figure de l'exercice **41,** puis vérifie les résultats obtenus.

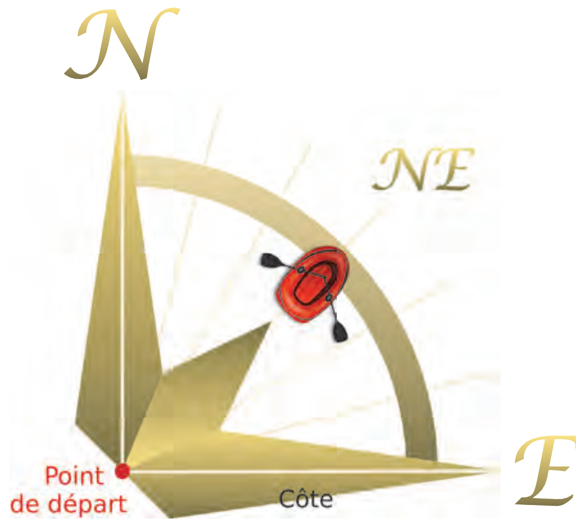
50 On considère MNRP un trapèze rectangle, tel que le côté [MN] est perpendiculaire aux bases [MP] et [RN].
On a : MN = 4 cm ; $\widehat{MNP} = 60°$ et RP = RN.
La perpendiculaire à la droite (NP), passant par R, coupe [NP] en H.

a. Construis une figure à main levée.

b. Calcule les longueurs MP, NP, RH et RN. Arrondis si besoin les longueurs au millimètre.

c. Détermine la valeur, arrondie au centimètre carré, de l'aire du trapèze MNRP.

51 Un bateau met le cap Nord-Est et s'éloigne de la côte, à la vitesse moyenne de 15 nœuds.



a. Calcule la distance parcourue au bout de 45 minutes, sachant qu'un nœud vaut environ 1,852 km/h.

b. À cet instant, à quelle distance de la côte se trouve le bateau ?

52 Elsa joue au cerf-volant sur la plage. La ficelle est tendue et déroulée au maximum. L'angle de la ficelle avec l'horizontale est de 48°.

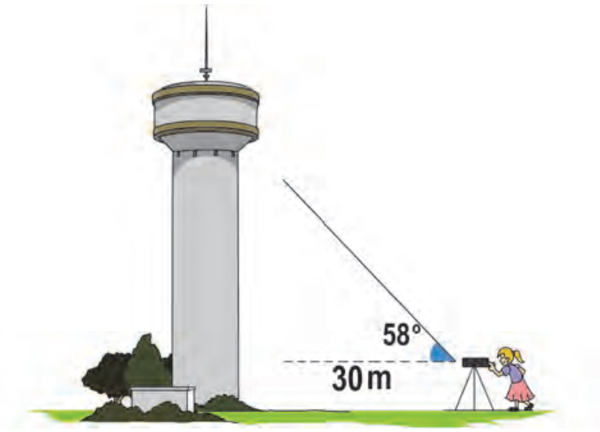
Elsa tient son dévidoir à 60 cm du sol. Le cerf-volant vole à 12 m du sol.

a. Dessine un schéma de la situation.

b. Calcule la longueur de la ficelle déroulée. Donne la valeur arrondie au décimètre.

53 Château d'eau

Juliette se place à 30 m d'un château d'eau et mesure l'angle entre l'horizontale et le haut du réservoir. Pour cela, elle utilise un appareil placé à 1,70 m du sol. Elle trouve 58°.



a. Calcule la hauteur du château d'eau, arrondie au mètre.

b. Le réservoir (partie supérieure) peut être assimilé à un cylindre de contenance 500 m³. Selon Juliette, sa hauteur est de 7 m. Estime le diamètre de sa base.

54 Triangle isocèle

Soit OAB un triangle isocèle en O, tel que OA = 10 cm et $\widehat{AOB}$ = 36°.

a. Construis ce triangle. Trace la bissectrice de l'angle $\widehat{AOB}$, elle coupe le segment [AB] en H.

b. Montre que le triangle OHB est rectangle en H, et que H est le milieu du segment [AB].

c. Calcule la longueur AB, arrondie au millimètre.

55 Équerre

Un des côtés de l'angle droit d'une équerre mesure le tiers de l'autre. Peux-tu déterminer la mesure de ses angles ?

56 Vrai ou Faux

P.1. Le cosinus d'un angle aigu est toujours supérieur au sinus de ce même angle.

P.2. Pour tout angle aigu de mesure x (en degrés), $\cos(90 - x) = \sin x$.

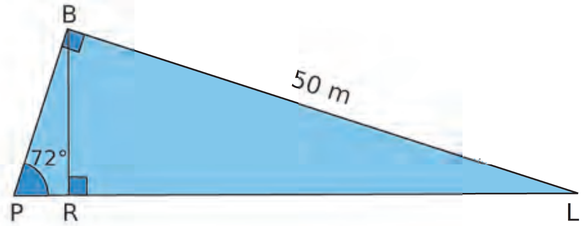
P.3. Dans le triangle ROI rectangle en O, si $\sin \widehat{OIR} = \frac{4}{5}$, alors OI = 5.

P.4. Dans le triangle MAT rectangle en M, si $\tan \widehat{MAT} = 1$, alors MAT est isocèle en M.

57 Course

Rafaël et Léo nagent pour atteindre la bouée P. Ils sont respectivement en positions R et L.
On a BL = 50 m et $\widehat{BPL}$ = 72°.

Calcule l'avance de Rafaël sur Léo, en mètres.

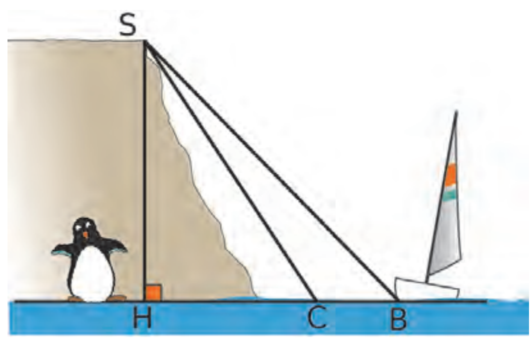


58 Ce pendule est constitué d'une bille suspendue à un fil inextensible, de longueur 90 cm.
Le fil du pendule est initialement vertical.

a. Premier cas : on l'écarte de 520 mm de sa position initiale. Détermine la mesure, arrondie au degré, de l'angle obtenu entre le fil et la verticale.

b. Deuxième cas : une fois écarté, le fil fait un angle de 48° avec la verticale. Détermine la distance entre le pendule et la verticale, arrondie au centimètre.

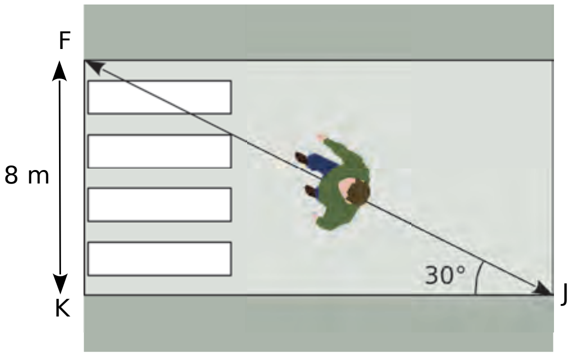
59 Charlotte navigue le long d'une falaise. Pour des questions de sécurité, elle ne doit pas approcher plus près que le point C. Elle a jeté l'ancre en B.
On a : SH = 100 m, $\widehat{HCS}$ = 75° et $\widehat{HBS}$ = 65°.



À quelle distance du point C le bateau de Charlotte se trouve-t-il ? Donne une valeur approchée au dixième de mètre près.

60 ***Tout ça pour ça...***

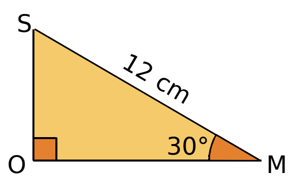
Jules est pressé de rejoindre ses copains au terrain de basket. Il décide de traverser imprudemment la route, du point J au point F, sans utiliser le passage piéton.
Le passage piéton est supposé perpendiculaire au trottoir.



En moyenne, un piéton met 9 secondes pour parcourir 10 mètres. Combien de temps Jules a-t-il gagné en traversant sans utiliser le passage piéton ?

61 ***Cône de révolution***

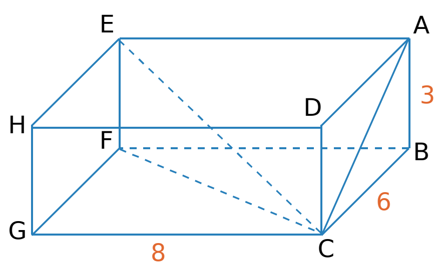
Soit un cône de révolution de sommet S, engendré par le triangle ci-contre.



a. Calcule la valeur exacte de la hauteur de ce cône.

b. Déduis-en la valeur exacte du volume de ce cône, puis la valeur arrondie au centimètre cube.

62 Soit le parallélépipède rectangle ABCDEFGH ci-dessous.



On admet que les triangles EFC et ACE sont rectangles, respectivement en F et en A.

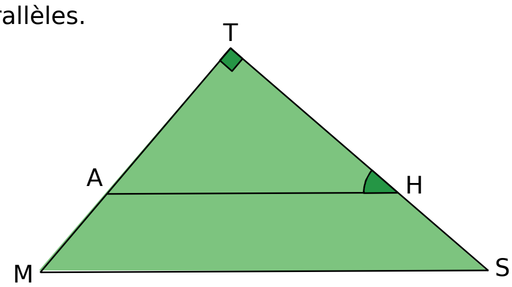
a. Calcule la longueur EC.

b. Calcule la mesure de l'angle $\widehat{CEF}$, arrondie au degré.

c. Calcule la mesure de l'angle $\widehat{CEA}$, arrondie au degré.

d. Calcule le volume de la pyramide CABFE.

63 Soit le triangle MTS tel que MS = 23 cm et TM = 15 cm. Les droites (AH) et (MS) sont parallèles.



a. Que peux-tu dire des triangles TMS et TAH ?

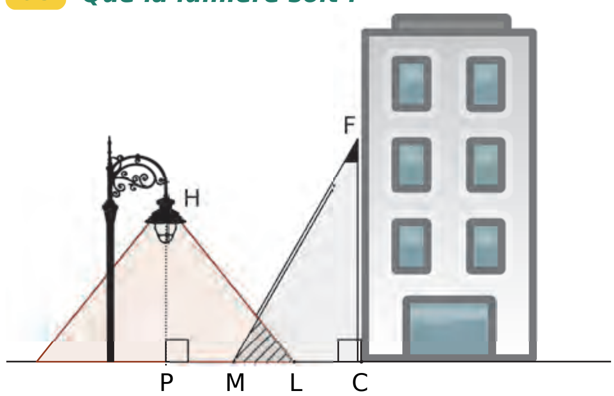
b. Déduis-en la mesure, arrondie au degré, de l'angle $\widehat{AHT}$.

64 ***Avec une formule trigonométrique***

a. Calcule sin $\hat{A}$ et tan $\hat{A}$, sachant que $\hat{A}$ est un angle aigu, tel que cos $\hat{A}$ = 0,7. Tu arrondiras au millième si nécessaire.

b. Calcule la valeur exacte de sin $\hat{B}$ et de tan $\hat{B}$, sachant que $\hat{B}$ est un angle aigu tel que $\cos \hat{B} = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

65 ***Que la lumière soit !***



On s'intéresse à la zone au sol, éclairée la nuit par deux sources de lumière : le lampadaire de la rue et le spot fixé en F sur la façade de l'immeuble.

On dispose des données suivantes :
PC = 5,5 m ; CF = 5 m ; HP = 4 m ;
$\widehat{MFC}$ = 33° ; $\widehat{PHL}$ = 40°.

a. Justifie que l'arrondi au décimètre de la longueur PL est égal à 3,4 m.

b. Calcule la longueur LM correspondant à la zone éclairée par les deux sources de lumière. Tu arrondiras la réponse au décimètre.

c. On effectue des réglages du spot situé en F afin que M et L soient confondus. Détermine la mesure de l'angle $\widehat{CFM}$. Tu arrondiras la réponse au degré.

Quart de cercle trigonométrique

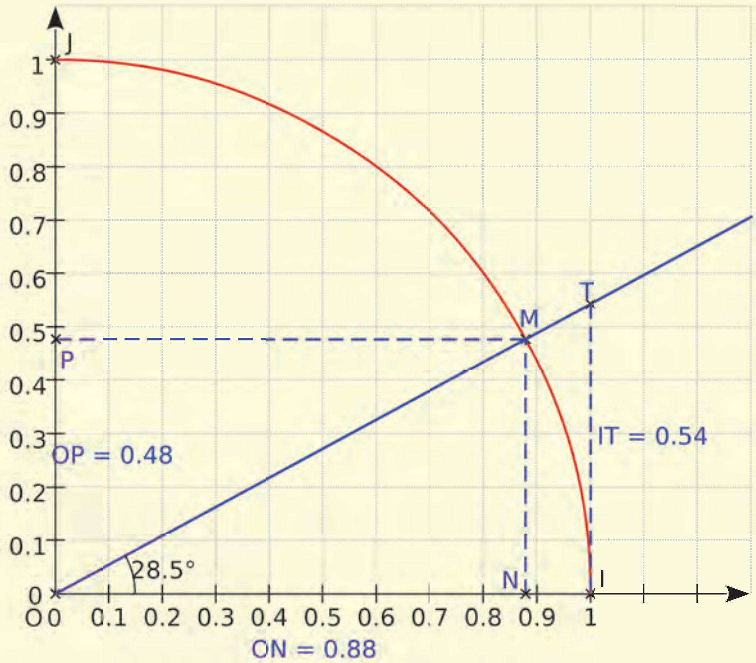
En utilisant un logiciel de géométrie dynamique, effectue les constructions demandées.

a. Affiche la grille et le repère, puis place les points O(0 ; 0) ; I(1 ; 0) et J(0 ; 1).

b. Construis le quart de cercle de centre O et d'extrémités I et J. Place un point M sur ce quart de cercle. Trace la demi-droite [OM) et affiche la mesure de l'angle $\widehat{IOM}$.

c. N est le point de l'axe des abscisses ayant la même abscisse que M, et P est le point de l'axe des ordonnées ayant la même ordonnée que M. Construis les points N et P, puis affiche les longueurs des segments [ON] et [OP].

d. Place le point T, intersection de [OM) et de la droite perpendiculaire à l'axe des abscisses, passant par le point I. Affiche la longueur du segment [IT].



Démonstrations

e. En te plaçant dans le triangle OMN rectangle en N, exprime le cosinus puis le sinus de l'angle $\widehat{IOM}$, en fonction des longueurs ON et OP.

f. Démontre que IT est égale à la tangente de l'angle $\widehat{IOM}$.
(Tu pourras appliquer le théorème de Thalès dans le triangle OTI.)

g. Exprime les coordonnées des points M et T, en fonction de l'angle $\widehat{IOM}$.

Applications

h. À l'aide de la figure, détermine les valeurs approchées de cos(60°), sin(45°) et tan(75°).

i. Comment varie le cosinus de $\widehat{IOM}$ lorsque $\widehat{IOM}$ varie de 0° à 90° (exclu) ?
Décris, de même, les variations de sin $\widehat{IOM}$ en fonction de la mesure de $\widehat{IOM}$.

j. Que peux-tu dire de tan $\widehat{IOM}$ lorsque le point M se rapproche de J ?

k. À l'aide de la figure, détermine la mesure, arrondie au degré, de l'angle aigu x tel que $\cos x = 0{,}4$, puis la mesure, arrondie au degré, de l'angle aigu x tel que $\sin x = \frac{1}{2}$.

l. À l'aide de la figure, détermine la mesure, arrondie au degré, de l'angle aigu x tel que $\cos x = \sin x$.
Dans ce cas, quelle est la valeur de $\tan x$?

m. Démontre géométriquement les résultats de la question précédente.
(Tu pourras préciser la nature des triangles OMN et OTI.)

G4

Espace

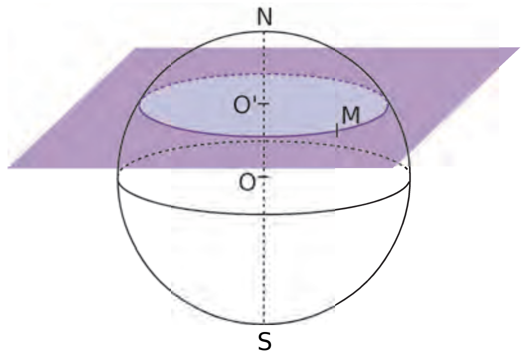
Activités

1 Section d'une sphère

Cours : 1

a On coupe une orange. Quelle forme voit-on apparaitre ?

On considère une sphère de centre O et sa section par un plan passant par un point O' du diamètre [NS] et perpendiculaire à ce diamètre.



b M est un point du cercle de section.
Que peut-on dire du triangle OO'M dans la réalité ?

c Que peut-on dire de la section lorsque le plan passe par le point O ?

d On a coupé une sphère de centre O et de rayon 5 cm par un plan et on a obtenu un cercle de section de centre O' et de rayon 3 cm.
À quelle distance OO' du centre de la sphère a-t-on coupé ?

2 Coordonnées dans l'espace

Cours : 3

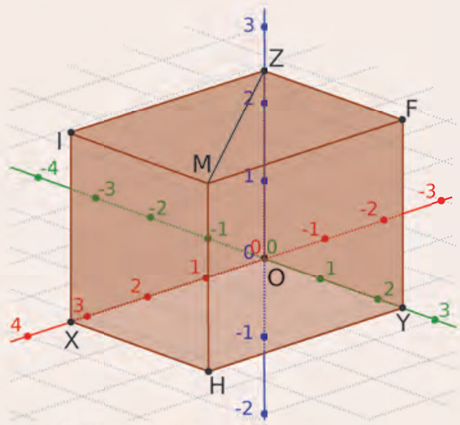
TICE Géométrie Dynamique

a Dans la fenêtre *Graphique 3D*, affiche les axes et la grille.
Sur la figure ci-après : l'axe de couleur rouge est l'axe des abscisses.
l'axe de couleur verte est l'axe des ordonnées.
l'axe de couleur bleue est l'axe des cotes.

- Crée un point M dans la fenêtre *Graphique 3D*. Déplace ce point. Pour le déplacer verticalement, il faut cliquer une fois sur le point M afin que le curseur prenne la forme d'une double flèche verticale.
- En t'aidant de la fenêtre *Algèbre*, essaie de positionner le point M aux coordonnées suivantes : $(2\ ;\ 1{,}5\ ;\ 2)$ $(0{,}5\ ;\ -2\ ;\ -0{,}5)$ $(-1\ ;\ -1\ ;\ 1)$ $(0\ ;\ 2\ ;\ -0{,}5)$.
D'après toi, comment sont calculées ces coordonnées ?

b Dans cette question, nous allons retrouver les coordonnées indiquées dans la fenêtre *Algèbre*.

- Construis le plan parallèle au plan (xOy), passant par le point M. Ce plan coupe l'axe des cotes en Z.
- Construis la droite perpendiculaire au plan (xOy), passant par le point M. Cette perpendiculaire coupe le plan (xOy) en H.
- Construis la droite parallèle à l'axe des ordonnées, passant par H. Elle coupe l'axe des abscisses en X.
- Construis la droite parallèle à l'axe des abscisses, passant par H. Elle coupe l'axe des ordonnées en Y.
Si nécessaire, masque les deux plans.



- Masque les droites, puis construis les segments [MZ], [MH], [HX] et [HY].
- Construis le point O(0 ; 0 ; 0), le polygone OXHY, puis le prisme de base ce polygone, dont Z est un point de la face du haut.

c Déplace le point M et explique comment sont déterminées ses coordonnées. À quelle condition le point M a-t-il une abscisse égale à 0 ? Une ordonnée égale à 0 ? Une cote égale à 0 ?

1 La sphère et la boule

→ 9

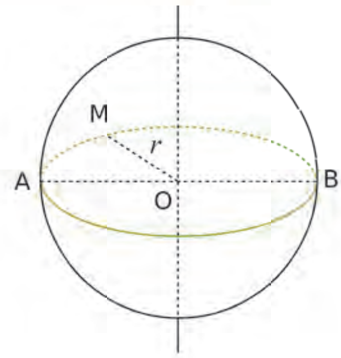
A Définitions

Définitions

- La **sphère** de centre O et de rayon r ($r > 0$) est **l'ensemble des points M** de l'espace, tels que OM = r.
- La **boule** de centre O et de rayon r ($r > 0$) est **l'ensemble des points M** de l'espace, tels que OM $\leqslant r$.

Exemple :

- [AB] est un diamètre de la sphère (segment qui joint deux points de la sphère, passant par le centre de la sphère).
- Le cercle vert est un **grand cercle** de la sphère (cercle de centre O et de **rayon** r).

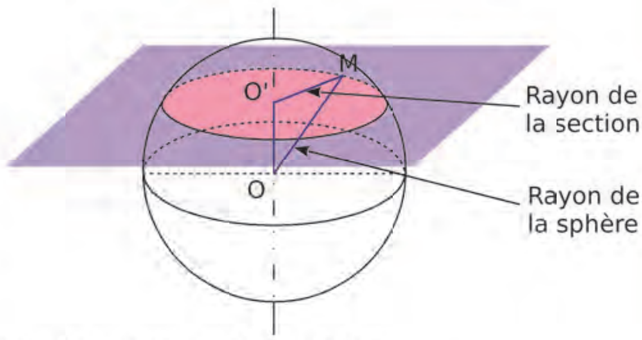


Remarque :
On peut dire que la sphère est l'enveloppe de la boule (comme la peau d'une orange) tandis que la boule est l'intérieur.

B Sections

Propriété La section d'une sphère de centre O par un plan est un **cercle**.

Exemple :
Ci-contre, la section de la sphère par le plan rose est un cercle de centre O' et de rayon O'M.



Remarques :

- Lorsque le plan ne passe pas par le centre de la sphère, la droite (OO') est perpendiculaire au plan de section.
- La section d'une boule par un plan est un disque.
- Le rayon de la section est toujours plus petit ou égal au rayon de la sphère.
- Dans le cas où le plan de section passe par le centre de la sphère, le rayon de la section est égal au rayon de la sphère. La section est alors un **grand cercle**.

2 Aires et volumes

→ 21

A Aire d'une sphère, volume d'une boule

Propriété 1

Pour calculer l'**aire** $\mathcal{A}$ **d'une sphère**, on utilise la formule :
$\mathcal{A} = 4 \times \pi \times r^2$ où r désigne le rayon.

Propriété 2

Pour calculer le **volume $\mathcal{V}$ d'une boule**, on utilise la formule :
$\mathcal{V} = \frac{4}{3} \times \pi \times r^3$ où r désigne le rayon.

Exemple :

Calcule l'aire $\mathcal{A}$ d'une sphère et le volume $\mathcal{V}$ d'une boule, toutes deux de rayon 5 cm.
Donne les valeurs exactes, puis des valeurs approchées au dixième près.

$\mathcal{A} = 4 \times \pi \times rayon^2 = 4 \times \pi \times 5^2$
$\mathcal{A} = 100\pi$ cm² **valeur exacte**
$\mathcal{A} \approx 314{,}2$ cm² **valeur approchée**

$\mathcal{V} = \frac{4}{3} \times \pi \times rayon^3 = \frac{4}{3} \times \pi \times 5^3$
$\mathcal{V} = \frac{500}{3}\pi$ cm³ **valeur exacte**
$\mathcal{V} \approx 523{,}6$ cm³ **valeur approchée**

B Agrandissements et réductions

Propriété Lors d'un agrandissement ou d'une réduction de **rapport k**,

- les longueurs sont **multipliées par k**,
- les aires sont **multipliées par k^2**,
- les volumes sont **multipliés par k^3**.

Exemple :

Dans une réduction de rapport $k = 0{,}5$:

- les longueurs sont multipliées par 0,5 ;
- les aires sont multipliées par $0{,}5^2 = 0{,}25$;
- les volumes sont multipliés par $0{,}5^3 = 0{,}125$.

3 Repérage

Propriété Tout point M de l'espace peut être repéré grâce à ses trois **coordonnées** dans un **repère**.

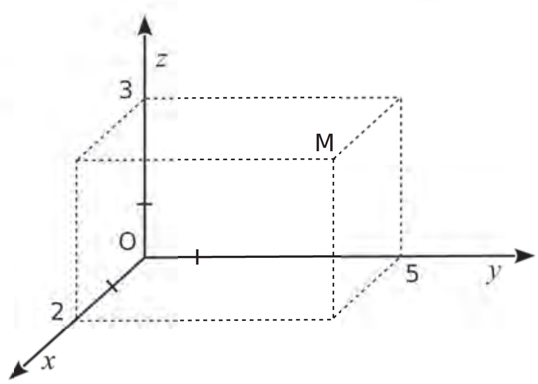
Définitions

- La première coordonnée, lue sur l'axe (Ox), est appelée l'**abscisse**.
- La deuxième coordonnée, lue sur l'axe (Oy), est appelée l'**ordonnée**.
- La troisième coordonnée, lue sur l'axe (Oz), est appelée la **cote** ou l'**altitude**.

Exemple :

On construit le pavé droit de sommets O et M, dont les arêtes sont parallèles aux axes du repère.

Le point M a pour coordonnées (2 ; 5 ; 3).

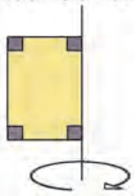


Voir aussi les Questions FLASH dans le manuel numérique !

À l'oral !

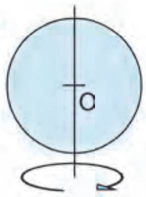
1 Dans chaque cas ci-dessous, indique quel solide est engendré par la rotation de la figure autour de l'axe.

a.

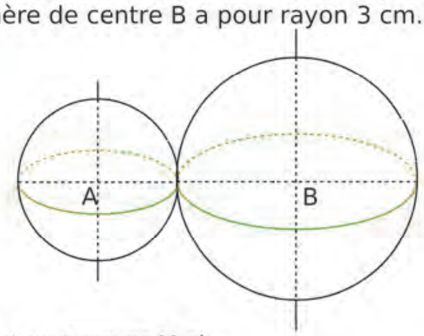


b.

c.



2 La sphère de centre A a pour rayon 2 cm. La sphère de centre B a pour rayon 3 cm.



Où peut se trouver M si...

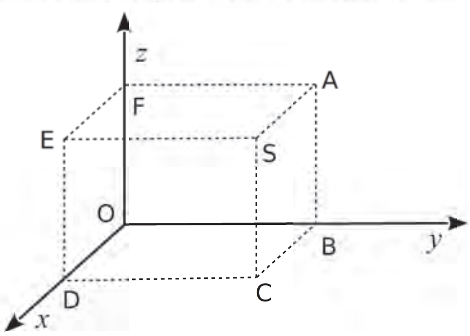
a. AM = 1,5 cm ? **b.** BM = 2 cm ?

c. AM = 2 cm et BM = 3 cm ?

3 Pour chaque solide ci-dessous, indique s'il est possible, en le coupant par un plan, d'obtenir comme section un triangle. Si oui, fais un dessin à main levée qui illustre la situation.

a. une sphère ;
b. un cube ;
c. une pyramide ;
d. un pavé droit ;
e. un cône de révolution ;
f. un cylindre de révolution.

4 Sachant que le point S a pour coordonnées (2,5 ; 7,5 ; 4) dans le repère Oxyz, donne celles des points A, B, C, D, E et F.



5 Julien possède une reproduction de sa voiture à l'échelle 1/10^{e}.

Afin de connaitre la mesure réelle des éléments ci-dessous, par combien doit-il multiplier les mesures qu'il a prises sur la reproduction ?

a. 8 cm pour la taille de l'antenne.

b. 0,4 dm^3 pour le volume du coffre.

c. 1,5 cm^2 pour l'aire d'un rétroviseur.

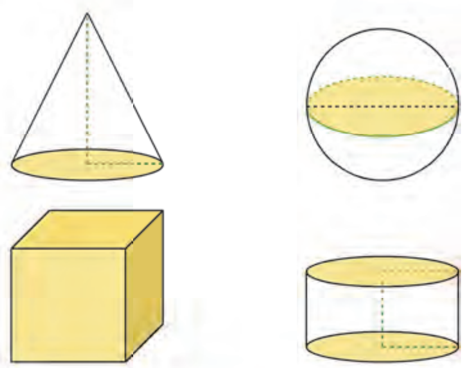
6 Associe chaque solide ci-dessous à sa représentation en perspective cavalière, puis classe-les dans l'ordre croissant de leur volume.

a. une boule de 1 cm de rayon ;

b. un cube de 1,5 cm d'arête ;

c. un cylindre de révolution, de hauteur 1 cm, dont la base a 1 cm de rayon ;

d. un cône, de hauteur 2 cm, dont la base a 1 cm de rayon.



7 **Vrai ou Faux**

P.1. Toutes les sections d'un pavé droit par un plan sont des rectangles.

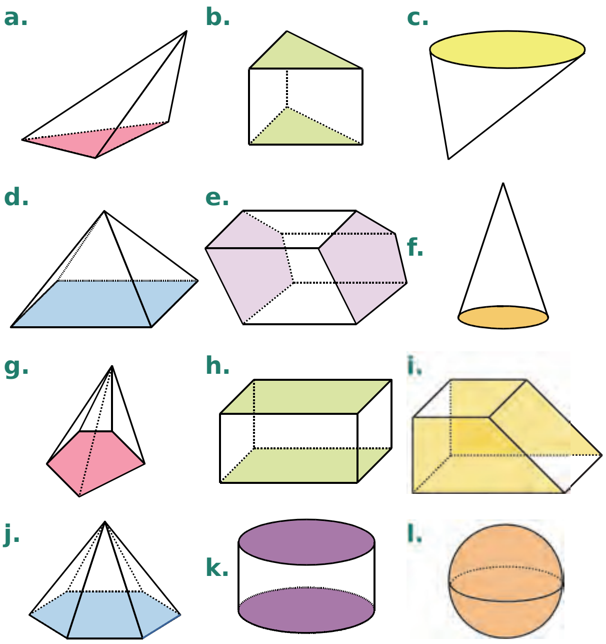
P.2. Toutes les sections d'un cône de révolution par un plan sont des cercles.

P.3. La plus grande distance entre deux points sur une sphère est le diamètre de la sphère.

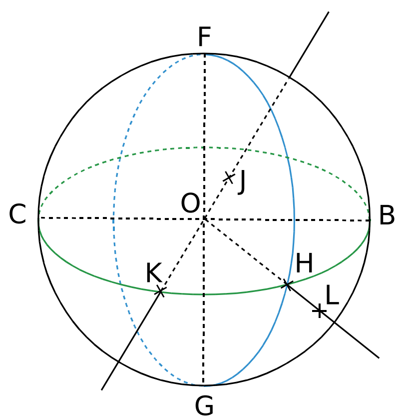
P.4. Dans un repère de l'espace, si un point a deux coordonnées nulles, alors il appartient à l'un des axes du repère.

Représentations de solides

8 Parmi les solides suivants, quels sont ceux que tu connais ? Décris-les de façon précise.



9 Voici une boule de centre O.



a. Quels points appartiennent à la sphère de centre O, passant par F ?

b. Écris toutes les égalités de longueurs.

10 ***Perspective***

a. Représente en perspective une sphère de centre O et de 4 cm de diamètre.

b. Place sur cette sphère un point M, puis un point N diamétralement opposé à M.

c. Trace le grand cercle passant par le point M.

d. Trace un autre grand cercle de cette sphère.

11 Un cornet de glace est assimilé à un cône de révolution, de diamètre de base 6 cm et de hauteur 10 cm, surmonté d'une demi-boule de même diamètre.

a. Donne la hauteur totale du cornet de glace.

b. Représente ce cornet en perspective.

12 **QCM**

a. Quel solide n'a pas de patron ?

R.1	R.2	R.3
un pavé droit	une sphère	un cône de révolution

b. Si B appartient à la sphère de centre K et de rayon 3 cm, alors...

R.1	R.2	R.3
KB = 3 cm	KB = 1,5 cm	KB = 6 cm

c. Si E et G sont diamétralement opposés sur la sphère de centre O et de rayon 4 cm, alors...

R.1	R.2	R.3
OG = 8 cm	EG = 4 cm	EG = 8 cm

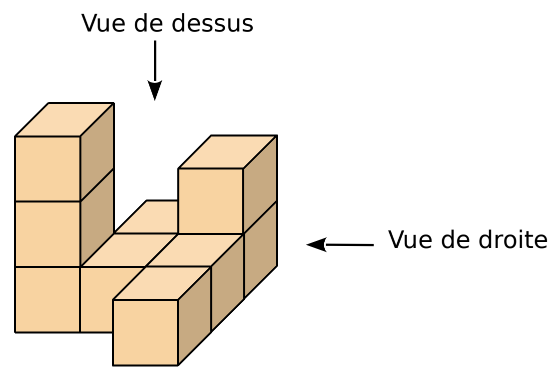
13 On assimile la Terre à une sphère de rayon 6 378 km. L'équateur et les méridiens sont des grands cercles de cette sphère.

a. Calcule la longueur de l'équateur.

b. Quelle est la distance entre le pôle Nord et le pôle Sud ?

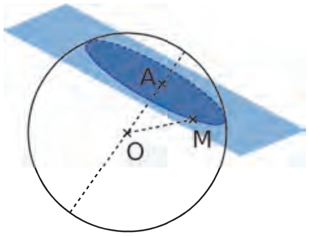
c. L'aventurier Kévin Fog a réédité l'exploit de son arrière-grand-père : le tour du monde en quatre-vingts jours, en survolant l'équateur à une hauteur de 1 000 m. Quelle a été sa vitesse moyenne en km/h ?

14 Représente, en vraie grandeur, la vue de dessus et la vue de droite de cet assemblage de 9 cubes d'arête 1 cm.



Sections de solides

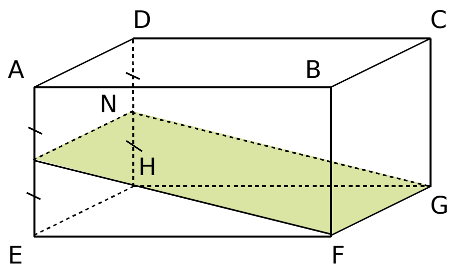
15 Une boule de centre O et de rayon 8 cm est coupée par un plan qui passe par le point A.
M est un point de cette section et OA = 3 cm.



a. Quelle est la nature de la section ?

b. Calcule l'aire exacte de la surface de cette section en cm^2.

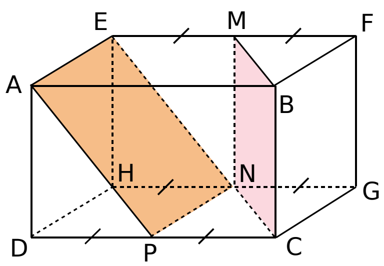
16 ***Quelle figure ?***



a. Quelle est la nature de cette section ? Justifie.

b. Représente-la en vraie grandeur, sachant que AB = 5 cm ; BC = 3 cm ; BF = 2 cm, et que N est le milieu du segment [DH].

17 Un pavé droit ABCDEFGH est tel que : AB = 6 cm ; BC = 4 cm et BF = 3 cm. M, N et P sont les milieux respectifs de [EF], [HG] et [DC].



a. Quelle est la nature des quadrilatères AENP et BMNC ? Justifie ta réponse.

b. Compare les aires de ces deux quadrilatères.

18 On réalise une section d'un cylindre de révolution, de 3,5 cm de rayon de base et de 6 cm de hauteur, par un plan perpendiculaire à la base et passant par les centres des deux bases.

a. Quelle est la nature de la section ?

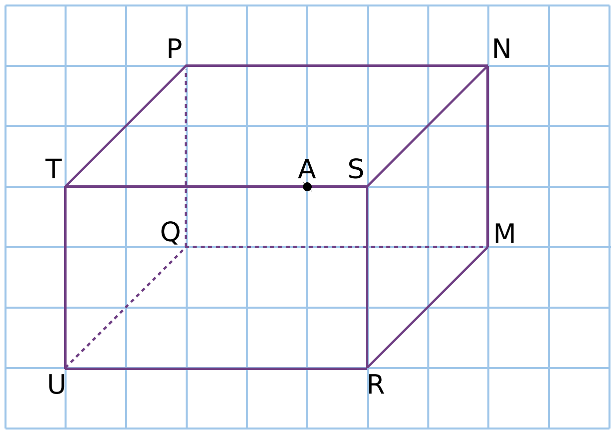
b. Représente cette section en vraie grandeur.

c. Calcule l'aire de la section en cm^2.

19 Reproduis la figure ci-dessous.

a. Construis en rouge la section du pavé MNPQRSTU par le plan contenant A et parallèle à la face MNSR.

b. Soit E le milieu de [UQ]. Construis en bleu la section du pavé MNPQRSTU par le plan contenant E, et parallèle à la face TSRU.



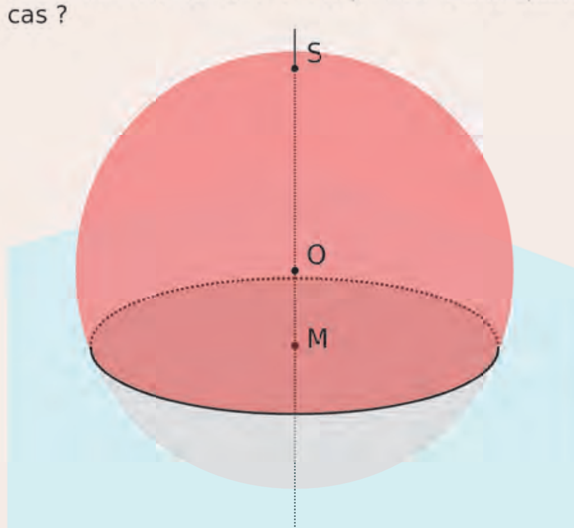
20 **TICE Géométrie Dynamique**

a. Dans la fenêtre *Graphique 3D*, construis...
- un point O ;
- la droite (d) perpendiculaire au plan horizontal et passant par le point O ;
- un point S sur cette perpendiculaire ;
- la sphère de centre O et passant par le point S ;
- un point M appartenant à la droite (d) ;
- le plan perpendiculaire à la droite (d) et passant par M.

b. Demande l'intersection de ce plan et de la sphère.

c. Quelle est la nature de cette intersection ?

d. Cette intersection existe-t-elle toujours ? Peut-elle être réduite à un point ? Dans quels cas ?



Agrandissements, réductions

21 Le Soleil est assimilé à une boule de 1 392 000 km de diamètre.

a. Calcule la surface du Soleil. Donne la réponse en notation scientifique.

b. Calcule le volume du Soleil. Donne la réponse en notation scientifique.

c. Sachant que la Terre a un rayon de 6 378 km, calcule son volume et donne la réponse en notation scientifique.

d. Combien de fois le Soleil est-il plus volumineux que la Terre ?

22 Un silo à grain est composé d'un cylindre de révolution, de rayon 4,5 m et de hauteur 10 m, surmonté d'un cône de révolution de de même rayon et de hauteur 2,5 m.

Calcule le volume de ce silo, arrondi au m^3.

23 On désire réaliser une maquette à l'échelle $\frac{1}{1\ 500}$ de la pyramide de Khéops. C'est une pyramide régulière à base carrée, de 231 m de côté et de 147 m de hauteur.

a. Quelles sont les dimensions de la maquette ? (Donne les arrondis au centimètre.)

b. Calcule le volume de cette maquette, de deux façons.

24 Une boule de pétanque a pour volume 189 cm^3 ; son rayon est le triple de celui du cochonnet.

a. Quel est le rapport de réduction du rayon ? (Donne une écriture fractionnaire ou décimale.)

b. Déduis-en le volume du cochonnet.

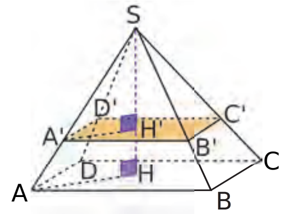
25 La Terre est assimilée à une sphère de rayon 6 378 km.

a. Calcule l'aire de la surface du globe terrestre. (Donne la valeur arrondie à l'unité.)

b. Les océans occupent 70,8 % de la surface de la Terre. Calcule l'aire de cette surface en km^2. (Donne la valeur arrondie à l'unité.)

26 On réalise la section d'une pyramide SABCD à base rectangulaire, de centre H, par un plan parallèle à sa base et passant par A'.

AB = 6,4 cm
BC = 4,8 cm
A'H' = 1,5 cm
SH = 15 cm



a. Calcule AH.

b. Quel est le coefficient de réduction entre les pyramides SABCD et SA'B'C'D' ?

c. Calcule les valeurs exactes des volumes des deux pyramides.

27 TICE Géométrie Dynamique

a. Affiche la fenêtre *Graphique* et construis un pentagone ABCDE.

b. Dans la fenêtre *Graphique 3D*, construis...

- un point H à l'intérieur du pentagone, puis la perpendiculaire au plan contenant le pentagone et passant par le point H ;
- un point S appartenant à cette perpendiculaire ;
- la pyramide de base ABCDE et de sommet S.

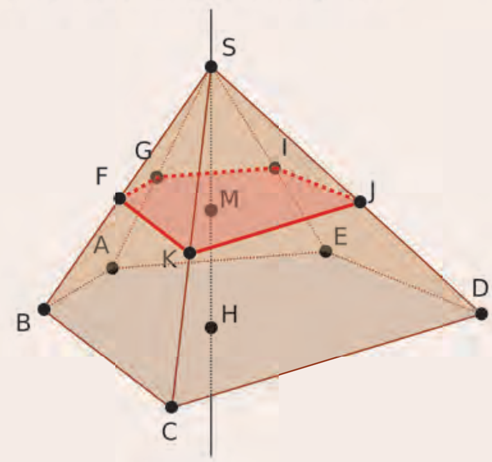
c. Construis un point M appartenant au segment [SH], puis le plan perpendiculaire à la droite (SH) et passant par le point M.

d. Demande l'intersection de ce plan avec la pyramide. Quel objet obtiens-tu ?

e. Calcule le rapport SM/SH.

f. Calcule le rapport de l'aire de la section par celle de ABCDE. Que remarques-tu ?

g. Construis la pyramide qui a pour base la section précédente et pour sommet S. Calcule le rapport du volume de cette pyramide par celui de SABCDE. Que remarques-tu ?



Coordonnées

28 QCM

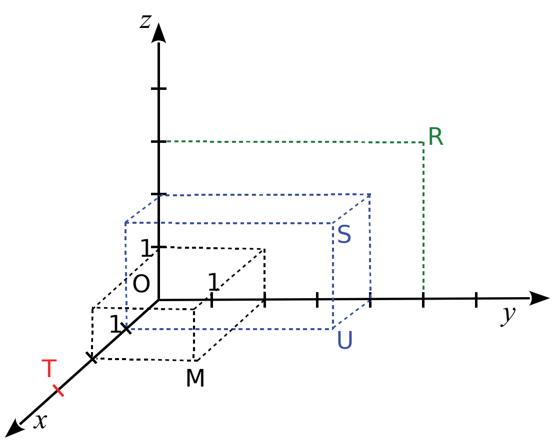
a. Dans un repère de l'espace, le point M de coordonnées (0 ; 0 ; 6) se situe sur...

R.1	R.2	R.3
l'axe (Ox)	l'axe (Oy)	l'axe (Oz)

b. Quel point de l'espace se situe dans le plan (Oxy) ?

R.1	R.2	R.3
A(0 ; 3 ; 6)	B(3 ; 0 ; 6)	C(3 ; 6 ;0)

29 Dans le repère ci-dessous, donne les coordonnées des points R, S, T, U et M.



30 TICE Géométrie Dynamique

Effectue les constructions suivantes dans la fenêtre *Graphique 3D,* en utilisant la zone de saisie.

a. Construis plusieurs points distincts, sachant que leurs coordonnées sont trois nombres égaux.

Quelle conjecture peux-tu faire sur ces points ? Vérifie ta conjecture à l'aide d'une construction.

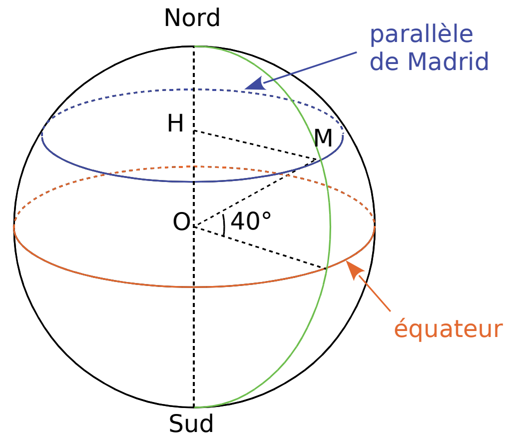
b. Construis plusieurs points distincts, tous d'abscisse 2.

Quelle conjecture peux-tu faire sur ces points ? Vérifie ta conjecture à l'aide d'une construction.

c. Construis plusieurs points distincts, tous de cote 3.

Quelle conjecture peux-tu faire sur ces points ? Vérifie ta conjecture à l'aide d'une construction.

31 On assimile la Terre à une boule de centre O et de rayon 6 378 km.



La ville de Madrid (M) est située sur le parallèle de latitude 40° Nord. H est le centre du cercle représentant ce parallèle.

a. Quelle est la longueur HM ? Justifie.

b. Calcule la longueur du parallèle passant par Madrid.

c. La longitude de Madrid est 3° Ouest.
Recherche les coordonnées géographiques d'une ville de même latitude que Madrid. Calcule alors la distance séparant ces deux villes sur leur parallèle, sachant que la longueur d'un arc de cercle est proportionnelle à l'angle au centre.

32 On assimile la Terre à une boule de centre O et de rayon 6 378 km.
Voici les coordonnées géographiques de Stockholm, Le Cap et Pécs :

Lieu	Latitude	Longitude
Le Cap	33° S	18° E
Stockholm	59° N	18° E
Pécs	46° N	18° E

a. Que remarques-tu concernant les coordonnées géographiques de ces trois villes ?
Représente les données de l'énoncé par un schéma similaire à celui de l'exercice précédent, où figurera le méridien de Greenwich.

b. Combien mesure l'angle entre Stockholm, le centre de la Terre et Le Cap ? Déduis-en la distance séparant ces deux villes sur ce méridien, sachant que la longueur d'un arc de cercle est proportionnelle à l'angle au centre.

c. De même, calcule la distance entre Pécs et Stockholm le long de leur méridien commun.

d. Recherche la définition du mot « antipode ».
Donne les coordonnées géographiques du point de la Terre situé aux antipodes de Stockholm. Dans quel océan se situe-t-il ? Près de quel pays ?

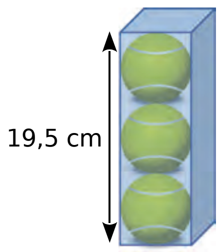
33 Un verre, représenté par un cylindre de révolution, de hauteur 10 cm et de rayon 4 cm, est rempli d'eau aux trois-quarts.

a. Exprime le volume d'eau en fonction de π.

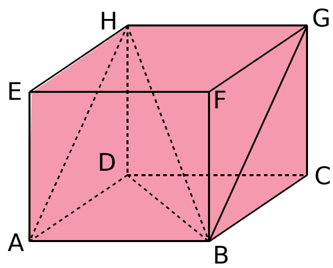
b. Par mégarde, on fait tomber dans ce verre un glaçon assimilé à une boule de rayon 3 cm.
Montre que le volume du glaçon, en cm^3, est 36π.

c. L'eau va-t-elle déborder du verre (avant que le glaçon ne fonde) ? Si non, quelle hauteur va-t-elle atteindre ?

34 Une boite de forme parallélépipédique contient trois balles de tennis, comme indiqué dans la figure ci-contre.
Calcule le pourcentage, arrondi à l'unité, du volume de la boite occupé par les balles.



35 ABCDEFGH est un pavé droit dont les dimensions sont :
AB = 7,5 cm,
BC = 6 cm,
AE = 8 cm.



a. Montre que HA = 10 cm.

b. Justifie que ABGH est un rectangle, puis fais-en une représentation en vraie grandeur.

c. Calcule la valeur exacte de HB. Déduis-en la mesure de l'angle $\widehat{AHB}$, arrondie au degré.

d. Calcule le volume de la pyramide HABD.

e. Soit I le point de [HD], tel que HI = 2 cm.
Le plan parallèle à la face ABCD, et passant par le point I, coupe [HA] en J et [HB] en K.
La pyramide HIJK est une réduction de la pyramide HABD.
Détermine le rapport de cette réduction.

f. Déduis-en l'aire du triangle IJK et le volume de la pyramide HIJK.

36 Vrai ou Faux

P.1. Si OM = OP, alors M et P appartiennent tous deux à une même sphère de centre O.

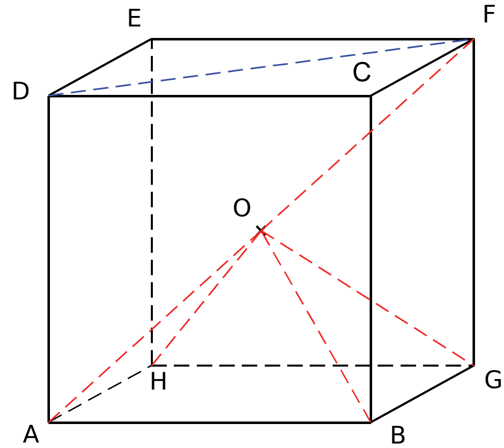
P.2. Pour multiplier le volume d'un prisme droit par 64, il suffit de multiplier ses dimensions par 8.

P.3. La section d'un cube par un plan peut être un triangle.

P.4. Si je multiplie le rayon d'une sphère par 2, alors son volume est multiplié par 8.

37 ***Dodécaèdre rhombique***

a. ABCDEFGH est un cube. O est le milieu de [AF].



Quelle est la nature du triangle DFA ? Justifie.

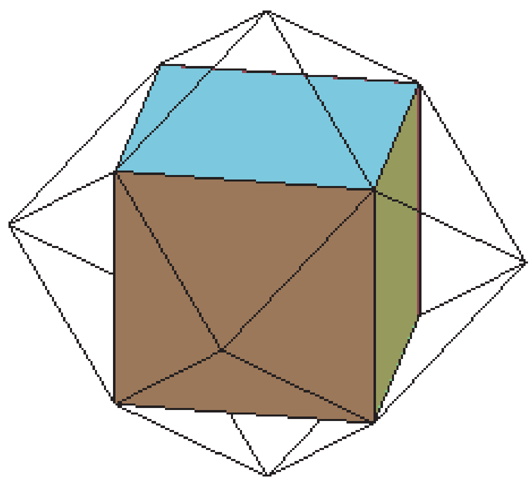
b. Sachant que AB = 6 cm, donne la valeur approchée par excès, au millimètre près, de DF, AF et AO.

c. Explique pourquoi AO = BO = GO = HO. Quelle est la nature du solide OABGH ?

d. Construis un patron de OABGH, puis découpe-le et colle-le pour obtenir la pyramide.

e. Fabrique cinq autres exemplaires de cette pyramide. Avec les six pièces ainsi constituées, essaie de reformer le cube ABCDEFGH.

f. Construis un patron du cube ABCDEFGH, colle chacune des pyramides sur une face du cube. Assemble ensuite le cube en plaçant les pyramides à l'extérieur.

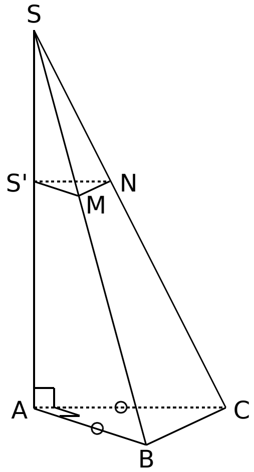


g. Le solide obtenu s'appelle un dodécaèdre rhombique (du grec « rhombos » qui veut dire losange), car toutes ses faces sont des losanges. Combien a-t-il de faces ? Quel est son volume ?

h. Construis un patron du dodécaèdre rhombique et assemble-le.

38 La dernière bouteille de parfum de « chez Chenal » a la forme d'une pyramide SABC à base triangulaire, de hauteur [AS], telle que :

- ABC est un triangle rectangle et isocèle en A ;
- AB = 7,5 cm et AS = 15 cm.



a. Calcule le volume de la pyramide SABC. (On arrondira au cm^3 près.)

b. Pour fabriquer le bouchon SS'MN, les concepteurs ont coupé la pyramide par un plan P, parallèle à sa base et passant par le point S', tel que SS′ = 6 cm.

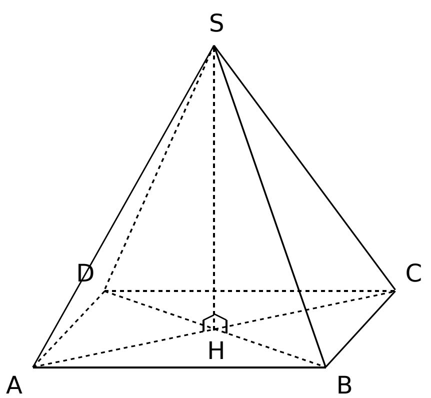
Quelle est la nature de la section plane obtenue S'MN ?

c. Calcule la longueur S′N.

d. Calcule le volume maximal de parfum que peut contenir cette bouteille, en cm^3.

39 La Pyramide du Louvre est une œuvre de l'architecte Leoh Ming Pei.

Il s'agit d'une pyramide régulière dont la base est un carré de côté 35,50 mètres, et dont les quatre arêtes partant du sommet mesurent 33,14 mètres. La Pyramide du Louvre peut être schématisée comme ci-dessous.

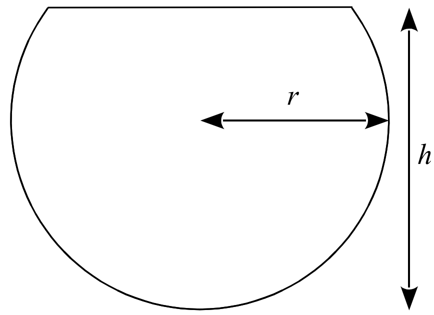


a. Calcule la hauteur réelle de la Pyramide du Louvre. Tu arrondiras le résultat au centimètre.

b. On veut tracer le patron de cette pyramide à l'échelle 1/800. Calcule les dimensions nécessaires de ce patron, en les arrondissant au millimètre.

c. Construis le patron en faisant apparaitre les traits de construction.

40 Un aquarium a la forme d'une sphère de 10 cm de rayon, coupée en sa partie haute : c'est une « calotte ».



La hauteur totale de l'aquarium est 18 cm.
Le volume d'une calotte sphérique est donné par la formule : $\mathcal{V} = \frac{\pi}{3} \times h^2 \times (3r - h)$, où r est le rayon de la sphère, et h est la hauteur de la calotte sphérique.

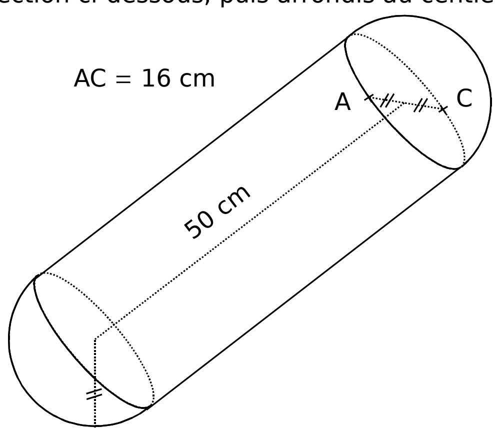
a. Prouve que la valeur exacte du volume de l'aquarium, en cm^3, est 1 296π.

b. Donne la valeur approchée du volume de l'aquarium, exprimée en litre (arrondis à l'unité).

c. On remplit cet aquarium à ras bord, puis on transvase la totalité de son contenu dans un aquarium parallélépipédique. La base du nouvel aquarium est un rectangle de 15 cm par 20 cm. Détermine la hauteur atteinte par l'eau (arrondis au cm).

41 Pour amortir les chocs contre les autres embarcations ou le quai, les péniches sont équipées de « boudins » de protection.

Calcule le volume exact, en cm^3, du « boudin » de protection ci-dessous, puis arrondis au centième.



Section

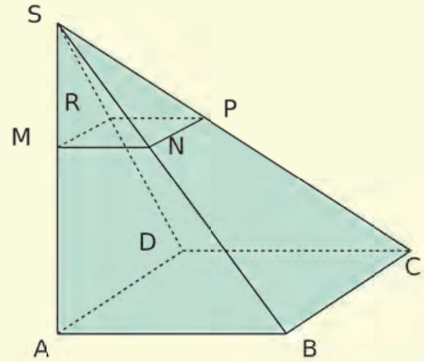
Partie 1

Sur la figure ci-contre, SABCD est une pyramide à base carrée de hauteur [SA], telle que AB = 9 cm et SA = 12 cm.

Le triangle SAB est rectangle en A.

Soit M un point de [SA] tel que SM = x cm, où x est compris entre 0 et 12.

On appelle MNPR la section de la pyramide SABCD par le plan parallèle à la base, passant par M.



a. Montre que MN = 0,75 x.

b. Soit $A(x)$ l'aire du carré MNPR en fonction de x. Montre que $A(x) = 0{,}5625\ x^2$.

c. Recopie et complète le tableau ci-dessous.

x en cm	0	2	4	6	8	10	12
$A(x)$ en cm²							

d. Place dans un repère les points d'abscisse x et d'ordonnée $A(x)$, donnés par le tableau.

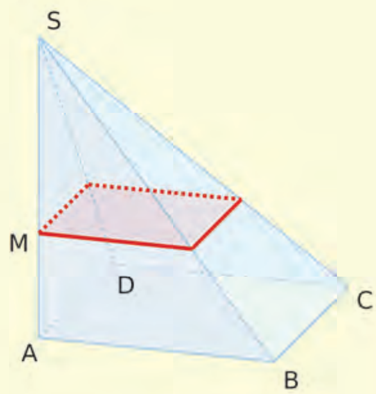
e. L'aire de MNPR est-elle proportionnelle à la longueur SM ? Justifie à l'aide du graphique.

Partie 2

TICE Géométrie Dynamique

f. Dans la fenêtre *Graphique*, construis un carré ABCD de côté 9 cm.

g. Dans la fenêtre *Graphique 3D*, construis...
- la droite perpendiculaire au plan horizontal, passant par le point A ;
- le point S sur cette perpendiculaire, tel que AS = 12 cm ;
- la pyramide de base ABCD et de sommet S ;
- un point M appartenant à l'arête [SA] ;
- le plan parallèle à la base ABCD, passant par le point M ;
- la section de la pyramide par ce plan.



h. Affiche la fenêtre *Graphique 2*. Dans le champ de saisie, écris : T=(SM,poly2) (si poly2 est l'aire de la section). Demande l'affichage de la trace du point T. Que représente T dans le cadre de ce problème ?

i. Déplace le point M le long de [SA]. Qu'observes-tu dans la fenêtre *Graphique 2* ? Vérifie alors les résultats de la **partie 1**.

D1

Généralités sur les fonctions

Activités

1 Notion de fonction

Cours : 1

a Lorsqu'un nombre x entre dans une machine mathématique, celle-ci renvoie un nombre appelé « image de x ». Recopie et complète.

• La **machine** $\boldsymbol{f}$ renvoie le périmètre d'un carré de côté x.

14 cm → f → ? ? → f → 36 cm x → f → ?

• La **machine** $\boldsymbol{g}$ renvoie l'aire d'un carré de côté x.

14 cm → g → ? ? → g → 36 cm² x → g → ?

• La **machine** $\boldsymbol{h}$ renvoie la somme de 1 et du triple de x.

– 5 → h → ? ? → h → 37 x → h → ?

• La **machine** $\boldsymbol{d}$ n'accepte que des nombres entiers positifs. Elle renvoie le nombre de diviseurs de l'entier n.

10 → d → ? 12 → d → ? 17 → d → ?

Ces machines sont appelées **fonctions**.

b Quelle est l'image de 4 par la fonction f ? Complète : $f(4) = ...$

c Utilise la notation précédente pour écrire les images de 17 par les fonctions g et h.

Les antécédents de 52 par une fonction sont les nombres qui ont pour image 52 par cette fonction.

d Combien 52 a-t-il d'antécédents par la fonction f ?

e Quel est l'antécédent de 52 par la fonction h ?

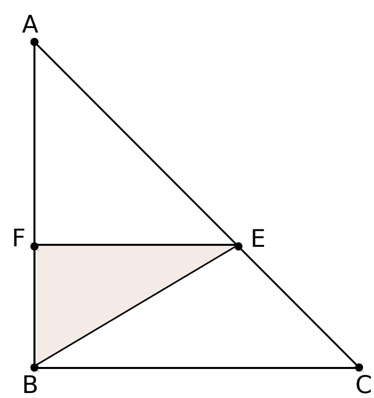
f Quels sont les antécédents de 2 par la fonction d ?

g Peux-tu trouver deux antécédents de 3 par la fonction d ?

2 Variations

Cours : 2

ABC est un triangle rectangle isocèle en B, tel que AB = 6 cm.
F est un point appartenant à [AB].



a Quelle est l'aire du triangle BFE quand F est le milieu de [AB] ?

b Quelle est l'aire du triangle BFE quand BF = 2 cm ?

On appelle f la fonction qui, à la longueur du côté [BF], associe l'aire de BEF. On note x = BF.

c Quelles sont les valeurs possibles de x ?

d Démontre que $f(x) = -0{,}5x^2 + 3x$.

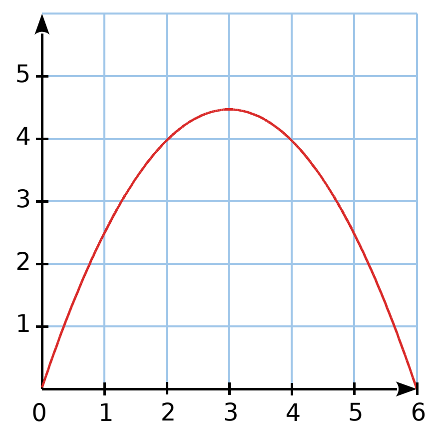
e Recopie et complète le tableau suivant.

x							
$f(x)$							

f Quel lien y a-t-il entre les nombres du tableau de valeurs et la représentation graphique de f ci-contre ?

g Quelle est la valeur approchée de l'ordonnée du point d'abscisse 1,5 ? Que cela signifie-t-il pour la fonction f ?

h D'après toi, qu'est-ce que la représentation graphique d'une fonction ?



Représentation graphique de f

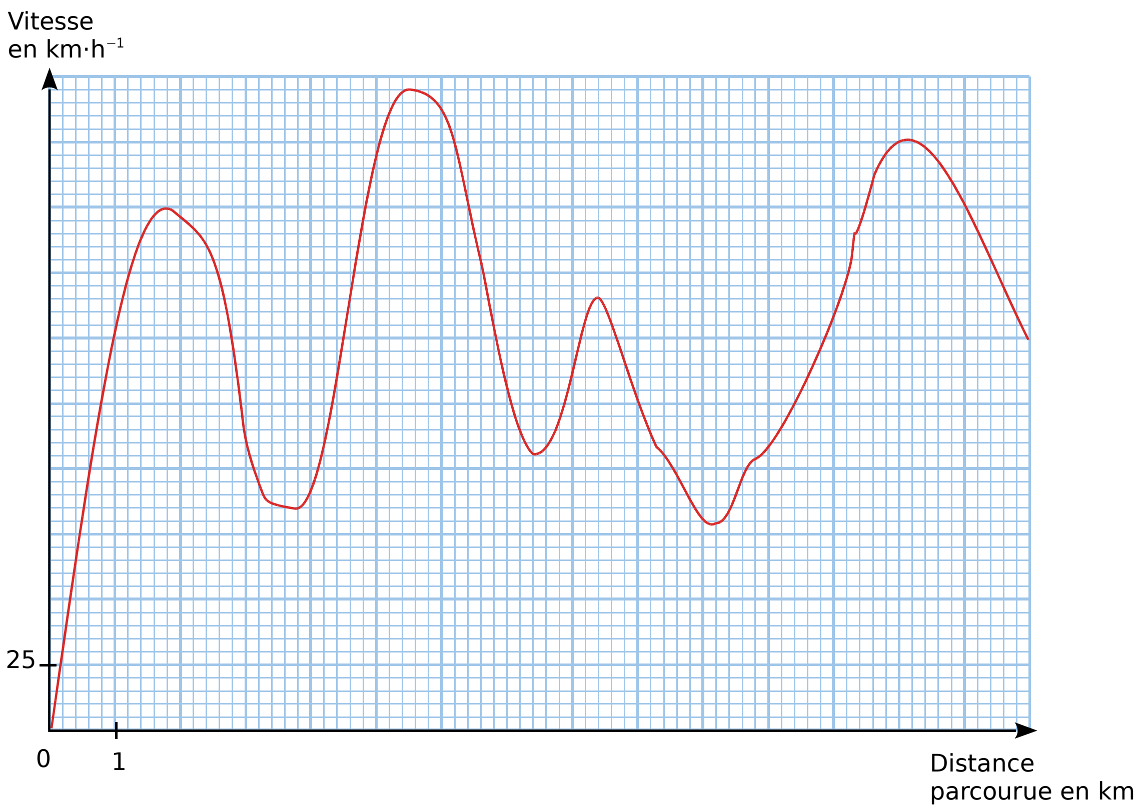
3 Avec un graphique

Cours : 2

Un pilote réalise des essais pour une nouvelle voiture de course, sur un circuit de 13,2 km.
Des capteurs, placés sur la route à différents endroits, mesurent la vitesse au moment du passage de la voiture. Ces vitesses sont notées dans le tableau ci-dessous.

Capteur n°...	1	2	3	4	5	6	7	8
Distance parcourue depuis la ligne de départ en km	0,8	2	2,8	4,6	7,2	9,4	...	13
Vitesse mesurée en km·h⁻¹	125	196	144	...	113	...	200	...

D'autre part, un enregistreur placé à bord de la voiture donne la vitesse en fonction de la distance parcourue. Les résultats sont notés sur ce graphique :



a Détermine, si possible, les données manquantes dans le tableau.

b Place sur le graphique les points qui représentent les données du tableau.
Que peux-tu dire de ces points ?

c Quelle vitesse a été mesurée après 6 km parcourus ? Peut-il y avoir plusieurs réponses ?

d La vitesse est-elle une fonction de la distance parcourue ? Justifie ta réponse.

e Quelle est la vitesse maximale atteinte ? La vitesse minimale ?

f À quelle vitesse la voiture est-elle repassée sur la ligne de départ au bout d'un tour ?

g En quels endroits du circuit la voiture roulait-elle à 160 km·h⁻¹ ?

h La distance parcourue est-elle une fonction de la vitesse de la voiture ?

i Sur un graphique identique, représente, à partir du premier kilomètre, le relevé d'une voiture qui roulerait constamment à 100 km·h⁻¹ après avoir parcouru ce premier kilomètre.

Cours

1 Généralités

A Notion de fonction

13

Définition Une fonction est un **processus** qui, à un nombre, associe un unique nombre.

Exemple :
On appelle f la fonction qui, à la longueur du côté d'un carré, associe le périmètre du carré.

La fonction f associe au nombre 5, le nombre 20.
Plus généralement, elle associe au nombre x, le nombre $4x$.
On note : $f : x \longmapsto 4x$ ou encore $f(x) = 4x$.

Remarque :
Pour une fonction f, on utilise la notation $f : x \longmapsto f(x)$ qui se lit : « f est la fonction qui, à x, associe le nombre $f(x)$ »

B Image et antécédent

31 39 47

Définitions Soit f une fonction qui, au nombre a, associe le nombre b.
Ce qui peut se noter : $f(a) = b$.
On dit alors que :

- b est **l'image** de a par f.
- a est **un antécédent** de b par f.

Remarque :
L'image d'un nombre est **unique**. Par contre, un nombre peut avoir **plusieurs antécédents**.

Exemple 1 : Soit f une fonction telle que $f(-2) = 0$.

- 0 est **l'image** de -2 par la fonction f.
- -2 est **un antécédent** du nombre 0 par la fonction f.

Exemple 2 : Soit la fonction $f : x \longmapsto x^2 - 4$.
Cela signifie qu'à tout nombre, ici noté x, la fonction f associe un unique nombre qui se calcule avec la formule : $x^2 - 4$. On dit que **l'image** de x par la fonction f est $x^2 - 4$, et on note $f(x) = x^2 - 4$.

$f(x) = x^2 - 4$	$f(x) = x^2 - 4$		
$f(-5) = (-5)^2 - 4$	$f(5) = 5^2 - 4$	$\longrightarrow$	On remplace x par -5, puis par 5.
$f(-5) = 25 - 4$	$f(5) = 25 - 4$	$\longrightarrow$	On calcule.
$f(-5) = 21$	$f(5) = 21$	$\longrightarrow$	L'image de -5 par la fonction f est 21 et celle de 5 est 21 également.

On remarque que -5 et 5 ont **la même image** : 21 par la fonction f.
Donc, 21 a au moins **deux antécédents** par la fonction f.

Définition Les images respectives de certaines valeurs de x par la fonction f peuvent être présentées dans un tableau appelé **tableau de valeurs**.

Exemple 3 : Voici un **tableau de valeurs** de la fonction $f : x \longmapsto x^2 - 4$.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	12	5	0	-3	-4	-3	0	5	12

La 2nde ligne du tableau donne les images des nombres de la 1re ligne par la fonction f.

- Pour déterminer l'image de 0 par la fonction f, on cherche 0 sur la 1re ligne du tableau, et on lit son **image** sur la 2nde ligne.

  L'image de 0 par la fonction f est -4. On écrit : $\boxed{f(0) = -4}$.

- Pour déterminer un (ou des) antécédent(s) de 5 par la fonction f, on cherche 5 sur la 2nde ligne du tableau et on lit **le (les) antécédent(s)** sur la 1re ligne.

  -3 et 3 sont **des antécédents** de 5 par la fonction f. On écrit : $\boxed{f(-3) = f(3) = 5}$.

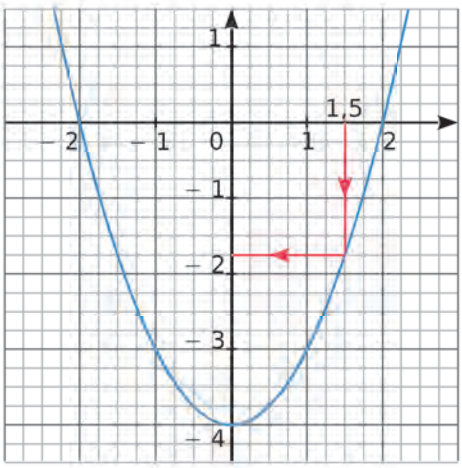
2 Représentation graphique

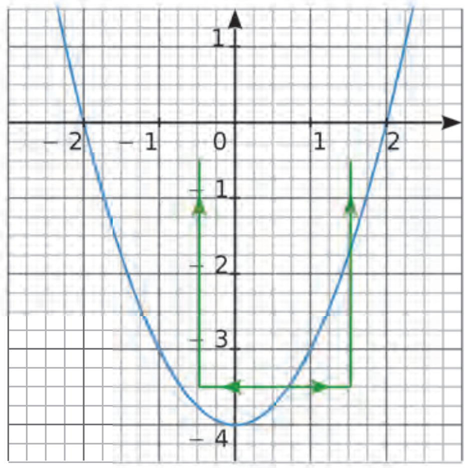
52

Définition La **représentation graphique** d'une fonction f est la courbe constituée de l'ensemble des points de coordonnées $(x\ ;\ f(x))$ dans un repère.

Exemple : Les graphiques ci-dessous représentent la fonction $f : x \longmapsto x^2 - 4$.

$f(-1) = -3$. Donc le point $(-1\ ;\ -3)$ est un point de la représentation graphique de la fonction f.





Pour déterminer graphiquement l'image de 1,5 par la fonction f, on cherche l'ordonnée du point de la représentation graphique de f qui a pour abscisse 1,5.

Il semble que cette ordonnée soit égale à $-1,75$.

On peut le vérifier par le calcul :

$f(1,5) = 1,5^2 - 4 = 2,25 - 4 = -1,75$

Pour déterminer graphiquement le (ou les) antécédent(s) de -3 par la fonction f, on cherche l'abscisse du (ou des) point(s) de la représentation graphique de f ayant pour ordonnée -3.

Deux points ont pour ordonnée -3. Ils semblent avoir pour abscisse -1 et 1. Donc -3 admet -1 et 1 pour antécédents.

On peut le vérifier par le calcul :

$f(-1) = (-1)^2 - 4 = 1 - 4 = -3$ et

$f(1) = 1^2 - 4 = 1 - 4 = -3$

Exercices

À l'oral !

Voir aussi les Questions FLASH dans le manuel numérique !

1 Dans chaque cas ci-dessous, détermine la fonction f qui, à x, fait correspondre...

a. son double ;

b. la somme de son triple et de 5 ;

c. la différence de son cube et de 3.

2 Explique comment x est « transformé » par chacune des fonctions ci-dessous.

a. $f : x \longmapsto -x$

b. $g : x \longmapsto 3x$

c. $h : x \longmapsto 2x - 1$

d. $v : x \longmapsto -5x^2$

3 Sachant que $f(2) = -3$ et que $g(0) = 4$, compose quatre phrases avec les mots et les nombres suivants.

fonction f — -3 — 4 — image — fonction g — 0 — antécédent — 2

4 Traduis chaque phrase ci-dessous par une égalité.

a. L'image de 2 par la fonction h est 4,5.

b. 2,5 a pour image $-4{,}2$ par la fonction f.

c. Par la fonction g, -4 est l'image de -6.

5 On considère la fonction f définie par : $f(x) = 2(x - 1)$. Calcule.

a. $f(0)$ **b.** $f(2)$ **c.** $f(1)$ **d.** $f(-4)$

6 Soit h la fonction qui, à un nombre, associe l'opposé de son inverse.

a. Quelle est l'image de 3 par h ?

b. Donne l'expression de h en fonction de x.

7 Soit k la fonction définie par $k(x) = 2x - 3$. Détermine un antécédent par la fonction k...

a. de 1 ; **b.** de 0.

8 La fonction p est définie par le tableau suivant.

x	-10	-3	-1	0	2,5	5	6
$p(x)$	-5	-1	0	1,5	8	0	-3

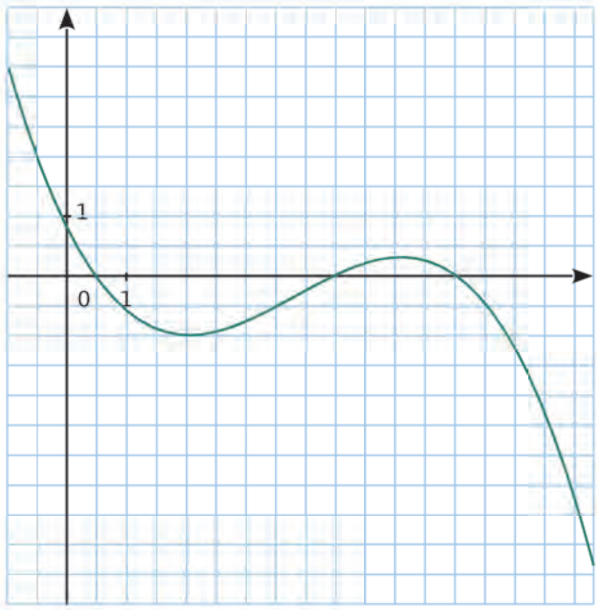
a. Détermine l'image de -10, puis l'image de 2,5 par la fonction p.

b. Détermine un (des) antécédent(s) de -3, puis de 0, par la fonction p.

9 Le graphique ci-dessous représente une fonction g pour x compris entre -1 et 8,8.

a. Détermine les images de 2 et de -1 par g.

b. Détermine le(s) antécédent(s) de 0 et de 2 par g.



10 **Vrai ou Faux**

P.1. Si $f(2) = -1$, alors 2 est un antécédent de -1 par f.

P.2. 5 et 7 peuvent être les images de 3 par la même fonction g.

P.3. 0 a un seul antécédent par la fonction qui, à tout nombre x, associe $3x + 5$.

P.4. 5 et 7 peuvent être les antécédents de 3 par la même fonction g.

Définition, vocabulaire

11 Ce diagramme illustre le procédé de calcul d'une fonction f. Détermine l'expression de $f(x)$.

$$x \xrightarrow{\times 3} \ldots\ldots \xrightarrow{+ 9} f(x)$$

12 Représente chaque fonction ci-dessous par un diagramme analogue à celui de l'exercice **11**.

a. $t(x) = 2x - 1$ **b.** $u(x) = -3x^2$

13 Traduis chacune des phrases suivantes par une correspondance de la forme : $x \longmapsto \ldots$

a. Pour calculer l'image d'un nombre x, on le multiplie par 2, puis on ajoute 3 au résultat.

b. Pour calculer l'image d'un nombre x, on calcule son carré, puis on soustrait 4 au résultat.

c. Pour calculer l'image d'un nombre x non nul, on multiplie l'inverse de ce nombre par -9.

14 Définis chaque fonction avec une phrase.

a. $f(x) = 4x$ **c.** $h(x) = 2x^2$

b. $g(x) = -2x - 1$ **d.** $p(x) = -2(x + 5)$

15 Écris l'expression d'une fonction satisfaisant aux trois conditions données ci-dessous.

a. $1 \longmapsto -2$; $5 \longmapsto -10$; $-2 \longmapsto 4$

b. $1 \longmapsto 2$; $5 \longmapsto 26$; $9 \longmapsto 82$

16 Traduis chaque égalité ci-dessous par une phrase contenant le mot « image ».

a. $f(3) = 4$ **c.** $h(-3) = 4,5$

b. $g(0) = -2$ **d.** $p(-0,5) = -2,5$

17 Traduis chaque égalité ci-dessous par une phrase contenant le mot « antécédent ».

a. $t(-2) = 0$ **c.** $u(3,5) = -5$

b. $s(10) = -1$ **d.** $v(-0,1) = -8$

18 Traduis les phrases suivantes par une égalité.

a. Par la fonction g, $-5,3$ est l'image de 6.

b. 2,5 a pour image 4,2 par la fonction f.

c. L'image de 3 par la fonction h est 7.

19 Traduis les phrases suivantes par une égalité.

a. 5 est un antécédent de -4 par la fonction p.

b. Un antécédent de 5 par la fonction m est 0.

c. $-0,5$ a pour antécédent $-4,2$ par la fonction t.

20 Traduis chaque notation ci-dessous par deux phrases : l'une contenant le mot « image » et l'autre contenant le mot « antécédent ».
Puis traduis-la par une égalité.

a. $f : 7 \longmapsto -17$ **c.** $h : 0 \longmapsto -4$

b. $g : -5 \longmapsto 3,2$ **d.** $v : -1 \longmapsto -3$

21 QCM

a. Si f est la fonction qui, à un nombre non nul x, associe l'opposé de son inverse, alors...

R.1	R.2	R.3
$f(x) = -x$	$f(x) = \frac{1}{x}$	$f(x) = -\frac{1}{x}$

b. Si 2 est l'image de -1 par g, alors...

R.1	R.2	R.3
$g(-1) = 2$	$g(2) = -1$	$g(-2) = 1$

c. Si -5 est un antécédent de 3 par h, alors...

R.1	R.2	R.3
$h(3) = -5$	$h(-3) = 5$	$h(-5) = 3$

22 À 10 ans, Jules pesait 34 kg. À 18 ans, son poids était de 55 kg. Soit p la fonction qui donne la masse de Jules (en kg), en fonction de son âge. Écris deux égalités à partir de ces données.

23 Soit t la fonction qui donne une température (en °C), en fonction d'une altitude (en m). Interprète concrètement ces deux égalités : $t(1\,000) = 12$ et $t(9\,000) = -43$.

Image, antécédent(s)

24 On donne le programme de calcul suivant.

- Choisir un nombre ;
- Multiplier ce nombre par lui-même ;
- Soustraire le triple du nombre choisi au produit obtenu.

a. En notant x le nombre choisi au départ, détermine la fonction f qui, à x, fait correspondre le résultat obtenu avec ce programme.

b. Applique ce programme de calcul au nombre -2. Traduis ce calcul par une phrase contenant le mot « image », puis par une égalité.

25 Soit la fonction h telle que $h : x \longmapsto 4x - 7$.

a. Écris un programme de calcul traduisant le calcul de l'image de x par la fonction h.

b. Calcule $h(3)$ et $h(-8)$.

26 On considère la fonction p définie par : $p(x) = -3x + 1$. Détermine les nombres suivants.

a. $p(0)$ **b.** $p(2)$ **c.** $p(-3)$ **d.** $p(-0{,}5)$

27 Soit la fonction g définie par ce schéma.

$$\boxed{x} \xrightarrow{\times x} \boxed{\ldots\ldots} \xrightarrow{-4} \boxed{\ldots\ldots}$$

Calcule $g(2{,}5)$ et $g(-1)$.

28 Soit f la fonction qui, à x, associe son inverse.

a. Exprime $f(x)$ en fonction de x. Tous les nombres ont-ils une image par f ?

b. Calcule l'image par f de : 5 ; -10 ; $0{,}25$; $\frac{1}{9}$.

c. Calcule un antécédent par f de :
3 ; -4 ; $0{,}5$; $\frac{1}{7}$.

29 Associe les expressions correspondantes.

$g(x) = 2x + 3$	•	•	$g(1) = 5$ et $g(5) = 1$
$g(x) = x^2 + 1$	•	•	$g(1) = 5$ et $g(5) = 13$
$g(x) = \frac{5}{x}$	•	•	$g(0) = 0$ et $g(1) = 2$
$g(x) = x(x + 1)$	•	•	$g(0) = 1$ et $g(1) = 2$

30 Soit la fonction f qui, au numéro du mois (janvier = 1), associe le nombre de jours du mois.

a. Quelles sont les images par f de 3 et de 11 ?

b. Quels sont les antécédents par f de 30 ?

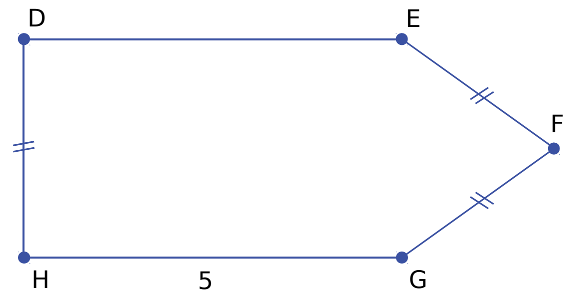
31 Soit la fonction f qui, à tout nombre entier, associe le plus petit nombre premier, supérieur ou égal à ce nombre entier.

a. Explique pourquoi $f(8) = 11$.

b. Quels sont les antécédents de 29 par f ?

32 Soit la fonction f qui, à la longueur DH, associe le périmètre de cette figure.

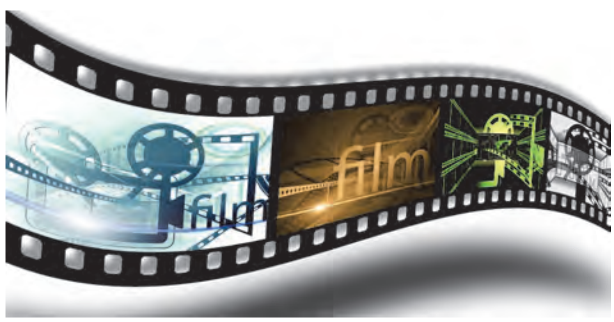
a. Écris l'expression de f.



b. Pour quelle valeur de DH le périmètre est-il égal à 19 ?

- Traduis cette question avec le langage des fonctions, et par une équation.
- Réponds à cette question.

33 Léa a un abonnement de cinéma : elle a une carte annuelle de 45 € qui lui permet d'acheter ensuite la place de cinéma à 2 €.



On appelle h la fonction qui, à un nombre x de places de cinéma, associe $h(x)$, la somme totale dépensée annuellement.

a. À quoi correspondent $h(3)$ et $h(10)$?

b. Calcule $h(20)$ et $h(50)$.

34 On considère la fonction h définie par : $h(x) = -5x^2 + 1$. Calcule :

a. $h(-2)$ **b.** $h(2)$ **c.** $h(10)$ **d.** $h(0{,}1)$

35 On considère la fonction p définie par : $p : x \longmapsto 5x^2 - 4x + 3$. Calcule l'image par la fonction p de chacun des nombres suivants.

a. 2 **b.** 5 **c.** -3 **d.** 0 **e.** 1,4

36 **TICE Tableur**

a. Reproduis la feuille de calcul suivante, sachant que, dans la colonne A, tu dois écrire les nombres entiers de 1 à 20.

	A	B	C
1	x	$f(x) = 3x^2 + 5$	
2	1		
3	2		

b. Quelle formule faut-il saisir en B2, et recopier vers le bas, pour obtenir la colonne B ?

=3*x*x+5	=3*A2*A2+5	=3*1*1+5

c. Utilise cette feuille de calcul pour déterminer l'image de 10 par f.

d. Utilise cette feuille de calcul pour déterminer un antécédent de 1 088 par f.

37 **TICE Tableur**

Soit g la fonction définie par $g(x) = x^3$.

a. Dans une feuille de calcul, détermine les images par g des nombres entiers compris entre -30 et 30.

b. Avec cette feuille de calcul, détermine l'image de -15 par g.

c. Avec cette feuille de calcul, détermine des antécédents de 10 648 par g.

38 Soit la fonction g définie par $g(x) = \dfrac{2}{x}$.

a. Recopie et complète le tableau suivant.

x	4	3		
$g(x)$			0,2	-1

b. Quel nombre n'a pas d'image par g ?

c. Traduis chaque colonne par deux phrases utilisant les mots « image » ou « antécédent ».

39 Construis le tableau de valeurs de la fonction g, définie par $g(x) = -3x^2 + 4$, pour les valeurs entières de x comprises entre -6 et 6.

40 **TICE Tableur**

Construis le tableau de valeurs de la fonction s, définie par $s(x) = -3x^2 + 4$, pour les valeurs entières de x comprises entre -50 et 50.

41 Voici le tableau de valeurs d'une fonction f.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	5	2	1	-3	-4	5	3	4	-4

a. Quelle est l'image de 3 par la fonction f ?

b. Quelle est l'image de 2 par la fonction f ?

c. Quel nombre a pour image 2 par la fonction f ?

d. Quel nombre a pour image 4 par la fonction f ?

e. Quels sont les nombres du tableau qui ont la même image par la fonction f ?

42 Voici le tableau de valeurs d'une fonction f.

x	-4	-2	-1	1	4
$f(x)$	1	2	4	-4	-1

Dans chaque cas ci-dessous, indique, d'après le tableau, un antécédent du nombre donné par la fonction f.

a. 4 **b.** 2 **c.** -4 **d.** -1

43 **QCM**

a. Si $g(x) = -3x + 4$, alors $g(2) =$

R.1	R.2	R.3
-28	-2	-18

b. Dans quel cas $h(-2) = 2$?

R.1	R.2	R.3
$h(x) = -2x^2$	$h(x) = -x$	$h(x) = 2x$

c.

x	4	3	5
$t(x)$	-8	5	0,2

Un antécédent de 5 par t est...

R.1	R.2	R.3
3	0,2	5

44 Voici le tableau de valeurs d'une fonction g.

x	− 0,5	− 0,1	0	0,5	1	2	8
$g(x)$	0,5	2	1	0,5	2	8	128

Recopie et complète les égalités suivantes.

a. $g(-\ 0{,}1) = ...$

b. $g(...) = 1$

c. $g(0{,}5) = ...$

d. $g(...) = 8$

e. $g(8) = ...$

f. $g(...) = 2$

45 Construis le tableau de valeurs d'une fonction f vérifiant toutes ces conditions :

- $f(0) = -\ 1{,}5$
- $f(1) = -\ 1$
- $f(4) = -\dfrac{1}{6}$
- $f(-\ 0{,}5) = \dfrac{4}{3}$
- L'image de − 1 par la fonction f est − 1.
- − 2 a pour image − 0,5 par la fonction f.

46 Construis le tableau de valeurs d'une fonction w vérifiant toutes ces conditions :

- $w(0) = 0$
- $w(-\ 0{,}5) = 0{,}75$
- Un antécédent de 0 par la fonction w est 1.
- − 2 a pour antécédent 6 par la fonction w.

47 La fonction k est définie par $k(x) = 4x - 3$.

a. Quelle est l'image de − 0,5 par k ?

b. Quel nombre a pour antécédent 1 par k ?

48 Voici un tableau de températures (en °C) relevées entre 8 h et 16 h.

Heure de relevé	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Température (°C)	2	3	5	4	3	6	7	8	7

On note h l'heure du relevé et T(h) la température relevée à l'heure h.

a. Que vaut T(11) ? Que signifie ce nombre ?

b. Donne l'image de 10 par T. Quel est le sens concret de ce nombre ?

c. Donne les antécédents de 3 par T. Quel est le sens concret de ces nombres ?

d. Dans ce contexte, explique pourquoi un nombre possède une seule image, mais peut avoir plusieurs antécédents par T.

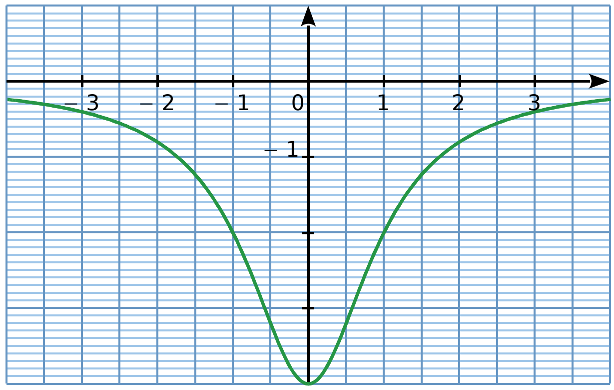
e. Construis une représentation graphique possible de T. Peut-on en imaginer plusieurs ?

Représentation graphique

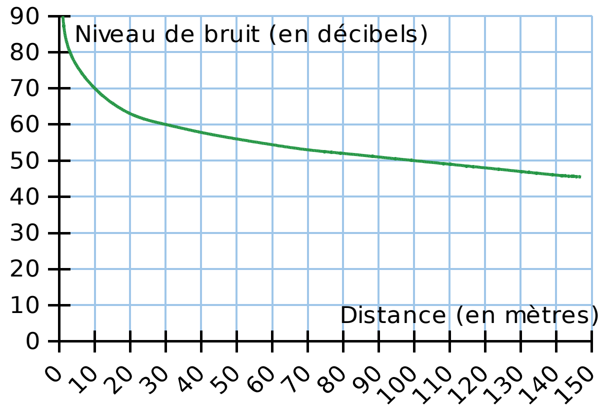
49 Le graphique suivant représente une fonction f .

a. Détermine $f(-\ 3)$ et $f(2)$.

b. Détermine le(s) antécédent(s) de − 2 et de − 3,2 par f.



50 Ce graphique donne le niveau de bruit (en décibels) d'une tondeuse à gazon en marche, en fonction de la distance (en mètres) entre la tondeuse et l'endroit où s'effectue la mesure.



En utilisant ce graphique, réponds aux deux questions suivantes.

a. Quel est le niveau de bruit de la tondeuse à une distance de 100 mètres ?

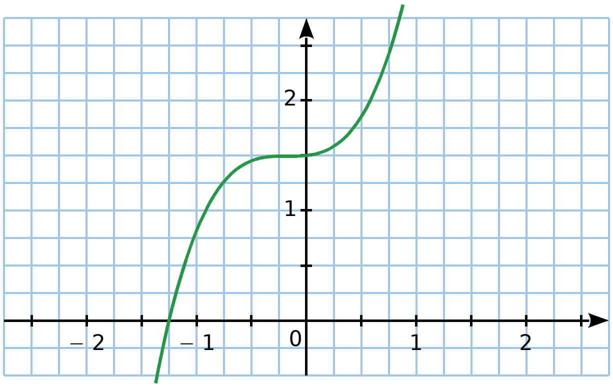
b. À quelle distance de la tondeuse se trouve-t-on quand le niveau de bruit est égal à 60 décibels ?

51 Voici le tableau de valeurs d'une fonction f.

x	− 2	− 1	0	1	2
$f(x)$	1	− 2	− 1,5	2	3

Construis une représentation graphique possible de la fonction f.

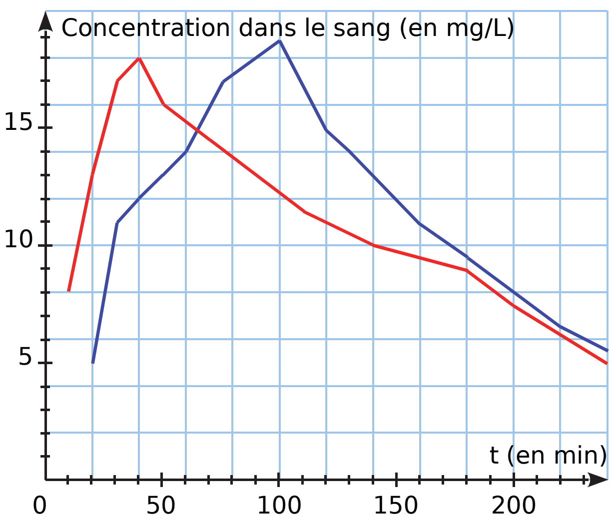
52 Voici la représentation graphique d'une fonction k.



Recopie et complète le tableau suivant.

x	– 1,25		– 1	
$k(x)$		1,5		1,25

53 Les deux courbes ci-dessous donnent la concentration dans le sang (en mg/L), en fonction du temps (en min), pour deux formes différentes d'un anti-douleur (dont l'action est proportionnelle à son taux de concentration dans le sang) : le comprimé « classique » (en bleu) et le comprimé effervescent (en rouge).



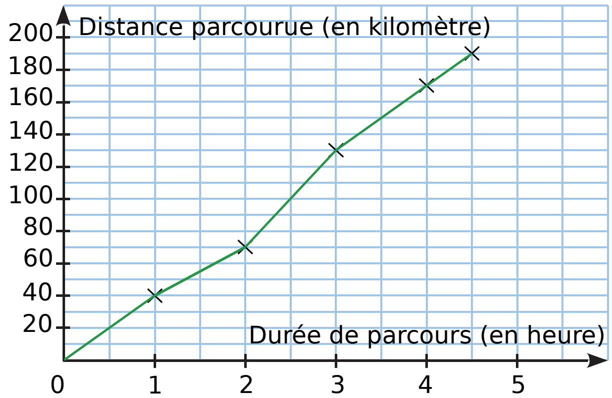
a. Pour chaque forme de comprimé, donne la concentration dans le sang au bout de 30 min ; d'1 h 30 min et de 3 h.

b. Au bout de combien de temps chaque concentration est-elle maximale ? Quelle forme de comprimé doit-on prendre si l'on souhaite calmer des douleurs le plus rapidement possible ?

c. À quels instants a-t-on une concentration de 13 mg/L pour chacun des produits ? À quel instant les deux concentrations sont-elles égales ?

d. Récris chacune des réponses précédentes en utilisant le langage des fonctions.

54 Lors d'une étape cycliste, les distances parcourues par un cycliste ont été relevées chaque heure après le départ. Ces données sont précisées dans le graphique ci-dessous.



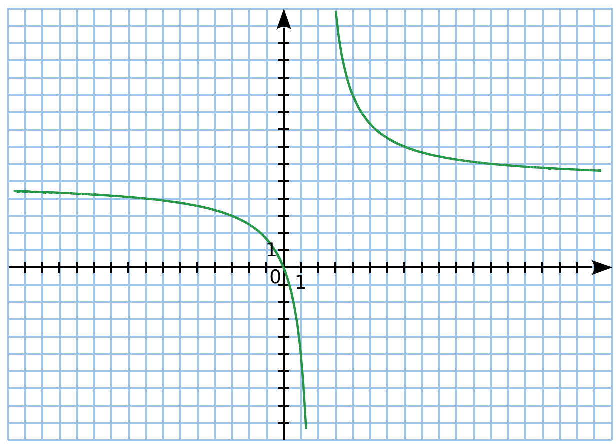
Par lecture graphique, réponds aux questions suivantes.

a. Quelle est la distance totale de cette étape?

b. En combien de temps le cycliste a-t-il parcouru les cent premiers kilomètres ?

c. Quelle est la distance parcourue lors de la dernière demi-heure de course ?

55 Voici la représentation graphique de la fonction D, définie par : $D(x) = \dfrac{5x}{x-2}$.



a. Quel nombre n'a pas d'image par la fonction D ? Peut-on le voir sur le graphique ? Explique.

b. Détermine, par lecture graphique :

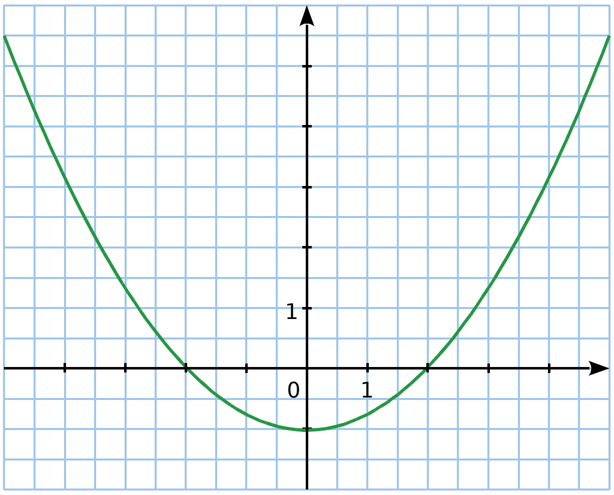
- l'image de 0 par la fonction D ;
- $D(4)$, $D(7)$, $D(-8)$;
- la valeur de a telle que $D(a) = 3$.

c. Vérifie par le calcul les réponses à la question **b**.

d. Donne une valeur approchée de :

- l'image de 8 par la fonction D ;
- l'image de – 5 par la fonction D.

56 Ce graphique représente une fonction h.



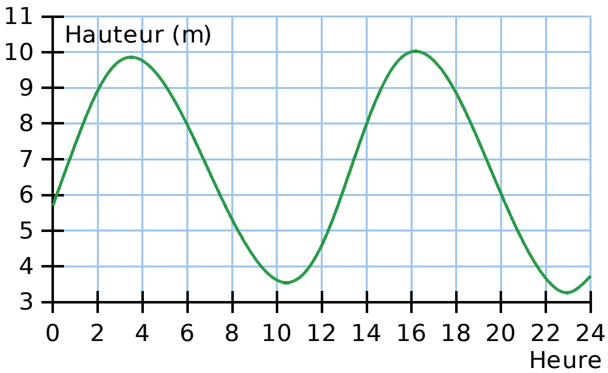
a. Quelle est l'image de 0 par la fonction h ?

b. Quels nombres ont pour image 0 par la fonction h ?

c. Donne une valeur approchée de :

- l'image de 4 par la fonction h ;
- l'image de $-$ 3 par la fonction h.

57 Une station a mesuré la hauteur des marées, le 20 janvier, 2016 à Saint-Malo. On obtient le graphique suivant. *Source : http://maree.info*



a. Décris par une phrase la fonction M représentée sur ce graphique.

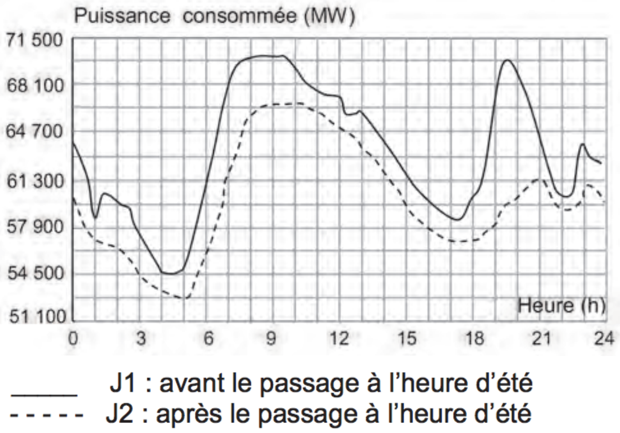
b. À quelle heure la marée a-t-elle été la plus haute ? La plus basse ? Traduis chaque réponse par une égalité du type : « $M(...) = ...$ ».

c. À quelle(s) heure(s) la marée a été à 6 m ? Traduis ta réponse par une phrase avec le langage des fonctions.

d. Quelle est la hauteur d'eau à 5 h ?

e. Un navire a un tirant d'eau de 6 m (c'est la hauteur de la partie immergée du bateau). Dans quelle(s) tranche(s) horaire(s) peut-il manœuvrer à Saint-Malo, sachant qu'il doit conserver une marge de 2 m pour ne pas toucher le fond ?

58 L'objectif du passage à l'heure d'été est de faire correspondre au mieux les heures d'activité avec les heures d'ensoleillement, pour limiter l'utilisation de l'éclairage artificiel. Le graphique ci-dessous représente la puissance consommée en mégawatts (MW), en fonction des heures (h) de deux journées J1 et J2 (J1 avant le passage à l'heure d'été et J2 après le passage à l'heure d'été).



On arrondira, si nécessaire, les résultats à la demi-heure.

a. Pour la journée J1, quelle est la puissance consommée à 7 h ?

b. Pour la journée J2, à quelle(s) heure(s) de la journée a-t-on une puissance consommée de 54 500 MW ?

c. À quel moment de la journée le passage à l'heure d'été permet-il le plus d'économies ?

d. Quelle puissance consommée a-t-on économisée à 19 h 30 ?

59 **TICE Tableur**

a. Construis le tableau de valeurs de la fonction t telle que $t(x) = x^2 + 5$, pour les valeurs entières de x comprises entre $-$ 20 et 20.

b. Construis la représentation graphique de cette fonction.

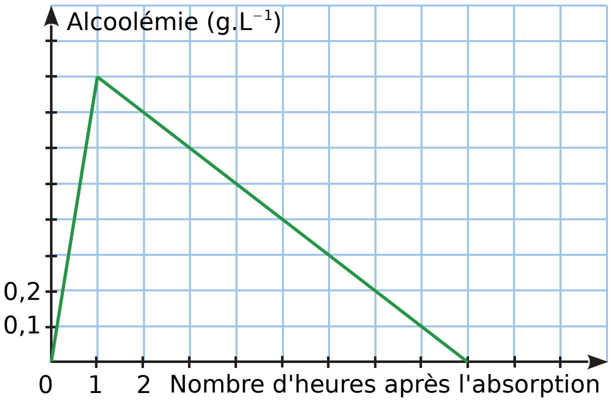
60 ***À vos crayons !***

a. Construis le tableau de valeurs de la fonction g telle que $g(x) = x^2 + 1$, pour les valeurs entières de x comprises entre $-$ 5 et 5.

b. Construis, dans un repère, une courbe représentative de la fonction g.

Problèmes

61 On mesure le taux d'alcoolémie, chez un homme, après absorption d'une boisson alcoolisée à jeun.



a. Quel est le taux d'alcoolémie au bout de trois heures ?

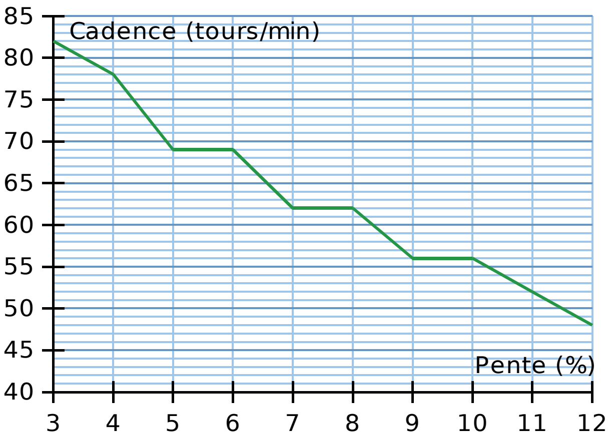
b. Quand le taux d'alcoolémie est-il de 0,5 g·L^{-1} ?

c. Quand le taux d'alcoolémie est-il maximal ?

d. Au bout de combien de temps le taux d'alcoolémie est-il nul ?

e. À partir de la première heure, de combien baisse le taux par heure ?

62 Le graphique ci-dessous donne la cadence d'un cycliste en fonction de la pente de la route.



a. Explique l'allure de la courbe.

b. Quelle est la cadence du cycliste sur une route dont la pente est 5 % ?

c. Donne un encadrement de la pente pour une cadence comprise entre 55 et 78 trs/min.

d. À chaque tour, le cycliste avance de 2,1 m. Quelle est sa vitesse pour une pente :

- de 3 % ?
- de 12 % ?

63 **TICE Tableur**

On considère le programme de calcul suivant.

- Choisir un nombre ;
- Ajouter 6 à ce nombre ;
- Multiplier le résultat par le nombre de départ ;
- Ajouter 9 au résultat.

a. Quel nombre obtient-on si l'on choisit 2 comme nombre de départ ? Donne le résultat sous la forme du carré d'un nombre.

b. Même question avec 5.

c. On note x le nombre choisi au départ, et on appelle f la fonction qui, au nombre x, associe le résultat du programme. Quelles sont les images de 2 et de 5 par la fonction f ?

d. Exprime, en fonction de x, l'image de x par la fonction f. Écris l'expression sous la forme d'un carré d'un nombre.

e. Recopie et complète le tableau suivant.

x	2	10	0	− 15	− 8	2,5
$f(x)$						

f. Donne un antécédent de 1 par f.

g. À l'aide d'un tableur, trace une représentation graphique de la fonction f.

h. En utilisant le graphique, quels nombres peut-on choisir au départ pour obtenir 81 comme résultat ?

i. Retrouve la réponse précédente par le calcul.

64 **TICE Tableur**

On étudie les rectangles qui ont un périmètre de 30 cm.

a. Construis-en deux exemples.

b. Soit l la largeur du rectangle.
Quelles sont les valeurs possibles de l ?
Exprime la longueur du rectangle, puis son aire $A(l)$, en fonction de l.

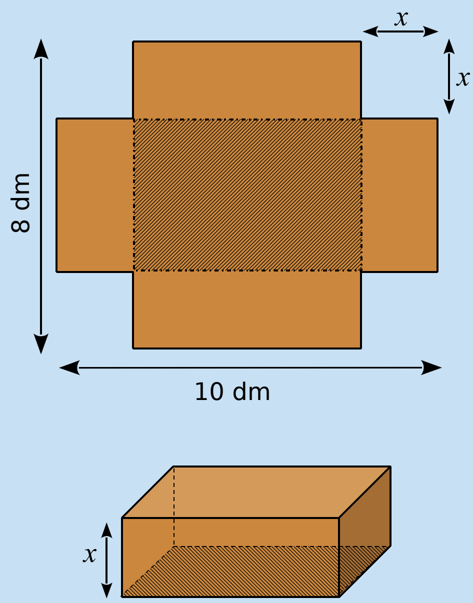
c. Dans un tableur, programme une feuille de calcul donnant l'aire $A(l)$ du rectangle en fonction de l.

d. Trace, à l'aide du tableur, une représentation graphique de la fonction A.

e. Détermine graphiquement les dimensions du rectangle qui a la plus grande aire. Trace-le.

65 **TICE Tableur**

En découpant quatre carrés identiques dans une plaque de carton rectangulaire de 8 dm par 10 dm, on obtient le patron d'une boite (sans couvercle).



On veut trouver la dimension des carrés à découper, pour obtenir une boite dont le volume sera maximum.

On appelle x la longueur du côté des carrés, en décimètres.

a. Quelle est la plus grande valeur possible de x ? Le volume de la boite est-il maximum pour cette valeur ?

b. Exprime, en fonction de x, l'aire du « fond » de la boite (partie hachurée), puis déduis-en l'expression du volume de la boite $V(x)$ en fonction de x.

c. Avec un tableur, construis un tableau de valeurs du volume V pour une dizaine de valeurs de x de ton choix.
Décris l'évolution de ce volume, suivant les valeurs de x.

d. Dans la même feuille de calcul, insère un graphique de type *ligne*, représentant les valeurs de ton tableau (avec les valeurs du volume en ordonnée).

Ce graphique confirme-t-il ta description précédente ? Le problème posé semble-t-il avoir une solution ?

e. En affinant les valeurs choisies dans ton tableau, et en utilisant de nouveaux graphiques, donne une valeur approchée, à 10^{-3} près, de la valeur de x cherchée.

66 On considère la fonction f définie par $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$

a. Calcule l'image de -3 par f.

b. Peux-tu calculer l'image de 0 par la fonction f ?

c. Dans cette question, on considère la fonction g définie par $g(x) = \dfrac{2x - 1}{x - 4}$. Détermine le nombre qui n'a pas d'image par la fonction g.

67 **Vrai ou Faux**

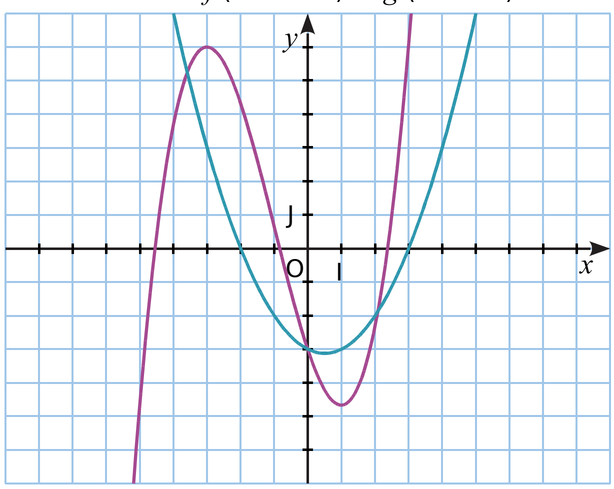
P.1. Pour toute fonction f, on a : $f(2x) = 2f(x)$.

P.2. Si $f(0) = 1$, alors $f(1) = 0$.

P.3. Si 4 est l'image de 3 par g, alors 3 est un antécédent de 4 par g.

P.4. Si $f(0) = 0$ et $f(10) = 10$, alors $f(5) = 5$.

68 Dans le repère (O, I, J) sont représentées deux fonctions : f (en violet) et g (en bleu).



a. Recopie et complète ce tableau en lisant le graphique.

x	-3	-1	0			
$f(x)$				-5	-3	6

b. Recopie et complète ce tableau en lisant le graphique.

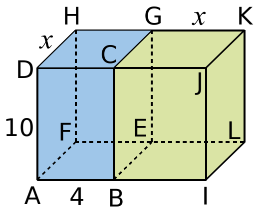
x	-2	0	3			
$g(x)$				-5	-2	3

c. Quelle est l'image maximale par la fonction f, pour un nombre compris entre -7 et 0 ?

d. Détermine une valeur approchée du nombre, compris entre -7 et 7, qui a la plus petite image par la fonction g.

e. Que penses-tu des solutions de l'équation : $f(x) = g(x)$?

69 L'unité est le centimètre.
ABCDFEGH et BIJCELKG sont deux pavés droits.



a. Exprime, en fonction de x, le volume du pavé bleu $\mathcal{V}_1(x)$, et celui du pavé vert $\mathcal{V}_2(x)$.

b. Construis, en fonction de x, un tableau de valeurs et les courbes représentatives de $\mathcal{V}_1$ et $\mathcal{V}_2$.

c. Pour quelle valeur de x les deux pavés ont-ils le même volume ?

70 Soient les fonctions f, g et h définies par :
$f(x) = 6x$; $g(x) = 3x^2 - 9x - 7$ et $h(x) = 5x - 7$

À l'aide d'un tableur, Pauline a construit un tableau de valeurs de ces fonctions. Elle a étiré vers la droite les formules qu'elle avait saisies dans les cellules B2, B3 et B4.

B3		=3*B1*B1−9*B1−7						
	A	B	C	D	E	F	G	H
1	x	−3	−2	−1	0	1	2	3
2	$f(x) = 6x$	−18	−12	−6	0	6	12	18
3	$g(x) = 3x^2 - 9x - 7$	47	23	5	−7	−13	−13	−7
4	$h(x) = 5x - 7$	−22	−17	−12	−7	−2	3	8

a. Détermine, à l'aide du tableau, la valeur de $h(-2)$.

b. Écris les calculs montrant que : $g(-3) = 47$.

c. Fais une phrase avec les mots « antécédent » ou « image » pour traduire l'égalité $g(-3) = 47$.

d. Quelle formule Pauline a-t-elle saisie dans la cellule B4 ?

e. Déduis du tableau ci-dessus une solution de l'équation : $3x^2 - 9x - 7 = 5x - 7$.

71 On appelle f la fonction définie par :
$f(x) = (x - 1)(2x - 5)$.

On a utilisé un tableur pour calculer les images de différentes valeurs par cette fonction f.

A2			$f(x)$						
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
2	$f(x)$	5	0	−1	2	9	20	35	54	77

a. Pour chacune des affirmations suivantes, indique si elle est vraie ou fausse. Justifie.
Affirmation 1 : $f(2) = 3$
Affirmation 2 : L'image de 11 par la fonction f est 170.

b. Sur la feuille de calcul, quelle formule a été saisie dans la cellule B2, puis recopiée ensuite vers la droite ?

72 **TICE Tableur**

La distance d'arrêt D_A est la distance qu'il faut à un véhicule pour s'arrêter. Elle dépend de la vitesse et se décompose ainsi : distance parcourue pendant le temps de réaction du conducteur D_{TR} + distance de freinage D_F, soit :

$$D_A = D_{TR} + D_F$$

a. De quels paramètres dépend D_{TR} ?

b. De quoi dépend la distance de freinage ?

c. Pour un conducteur en bonne santé, le temps de réaction est évalué à 2 s. Calcule la distance D_{TR} (en m) pour un véhicule roulant à 50 km/h, puis à 130 km/h.

d. Pour un conducteur en bonne santé, exprime la distance D_{TR} (en m) en fonction de la vitesse v en km/h.

e. Le tableau suivant donne D_F (en m) en fonction de la vitesse v (en km/h) sur route sèche. Recopie-le dans un tableur (avec les vitesses dans la ligne 1, et D_F dans la ligne 2).

v	10	20	30	40	50	60	70
$D_F(v)$	1,8	3,6	6,9	10,3	16,1	23,2	31,4

v	80	90	100	110	120	130	140
$D_F(v)$	41	52	64,6	78,1	93	108,5	123

f. Dans la ligne 3, programme le calcul de $D_{TR}(v)$.

g. Complète la ligne 4, en programmant le calcul de la distance d'arrêt sur route sèche.

h. Sur route mouillée, la distance de freinage augmente de 40 %. Calcule la distance de freinage sur route mouillée d'un véhicule roulant à 50 km/h, notée $D_{FM}(50)$,
Exprime $D_{FM}(v)$ en fonction de la vitesse, puis complète le tableau en calculant $D_{FM}(v)$.

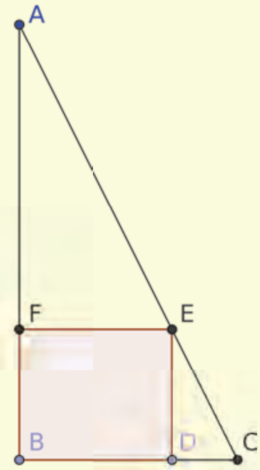
i. Complète le tableau en calculant la distance d'arrêt d'un véhicule sur route mouillée, $D_{AM}(v)$.

j. Sur une feuille de papier millimétré, représente la distance d'arrêt d'un véhicule en fonction de la vitesse, sur route sèche, et sur route mouillée. (Tu prendras en abscisse 1 cm pour 10 km/h, et en ordonnée 1 cm pour 20 m.)

k. Détermine, sur le graphique, l'augmentation de la distance d'arrêt entre une route sèche et une route mouillée pour les vitesses de 50 km/h ; 90 km/h et 130 km/h.

l. Par rapport aux deux courbes précédentes, où se positionnerait la courbe de la distance d'arrêt sur une route verglacée ?

Géométrie dynamique



Dans le triangle ABC rectangle en B, représenté ci-contre :

- AB = 10 et BC = 5.
- D est un point quelconque du segment [BC].
- E est un point du segment [AC], et F un point du segment [AB], tels que BDEF soit un rectangle.

a. Construis cette figure à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique. Rends fixes les points A, B et C. Le point D, quant à lui, doit pouvoir se déplacer librement sur le segment [BC].

b. De quoi dépendent le périmètre et l'aire du rectangle BDEF ?

On pose BD = x.

Soit la fonction p qui, à la longueur BD, associe le périmètre du rectangle BDEF.
Soit la fonction q qui, à la longueur BD, associe l'aire du rectangle BDEF.

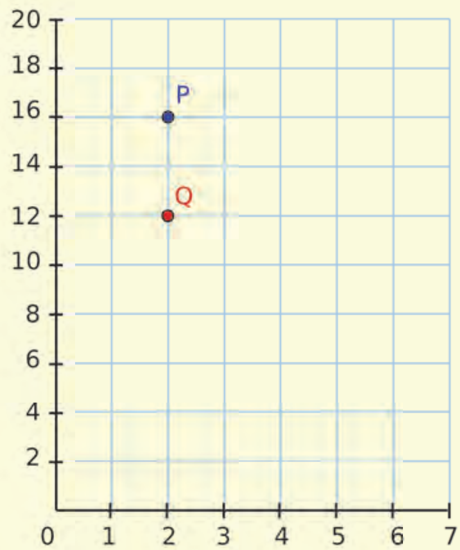
c. Quelles sont les valeurs possibles de x ?

d. Dans la zone de saisie, demande au logiciel d'afficher le périmètre p du rectangle BDEF. L'aire, quant à elle, s'affiche automatiquement dans la fenêtre *Algèbre*.

e. Déplace le point D. Recopie et complète le tableau de valeurs suivant.

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
$p(x)$											
$q(x)$											

f. Ouvre une fenêtre *Graphique 2*. Dans celle-ci, construis un point P d'abscisse la longueur BD et d'ordonnée le périmètre du rectangle BDEF.
Que peux-tu dire de ce point P par rapport à la fonction p ? Active la trace de P, puis déplace le point D.



g. Construis de manière analogue un point Q, correspondant à la fonction q. Active la trace de ce point, puis déplace le point D.

h. Le périmètre du rectangle BDEF atteint-il une valeur maximale ? Si oui, pour quelle position du point D ?

i. L'aire du rectangle BDEF atteint-elle une valeur maximale ? Si oui, pour quelle position du point D ?

j. Exprime DC en fonction de x puis, à l'aide du théorème de Thalès, exprime la longueur DE en fonction de x.

k. Démontre que $p(x) = 20 - 2x$ et que $q(x) = -2x^2 + 10x$.

l. Affiche les représentations graphiques de ces fonctions dans la fenêtre *Graphique 2*, et compare avec les traces laissées par les points P et Q.

D2

Fonctions linéaires et affines

Activités

1 Forfait

→ Cours : 1-2

Dans le cinéma où Samuel se rend habituellement, on propose deux formules différentes :

Formule COOL	→ 7 € la place
Formule FAN	→ 50 € d'abonnement annuel et 3 € la place

a Avec la formule « COOL », combien Samuel paiera-t-il au total s'il achète 10 places dans l'année ? 13 places ? 15 places ?
Mêmes questions pour la formule « FAN ».

Soit x le nombre de places achetées en une année.

b Soit f la fonction qui, à x, associe le prix payé avec la formule « COOL ».
Exprime $f(x)$ en fonction de x. Le prix payé est-il proportionnel au nombre de places achetées ?

c Soit g la fonction qui, à x, associe le prix payé avec la formule « FAN ».
Exprime $g(x)$ en fonction de x. Le prix payé est-il proportionnel au nombre de places achetées ?

d À ton avis, comment aider Samuel à choisir le tarif le plus intéressant ?

2 Augmentation, diminution

→ Cours : 3

Un magasin augmente tous ses prix de 8 %.

a Calcule le prix après augmentation d'un pantalon qui coutait initialement 28,25 €.

b Après augmentation, une veste est vendue au prix de 52,38 €. Quel était son prix initial ?

c On note p le prix initial d'un article, et f la fonction qui, à p, associe le prix de cet article après augmentation. Détermine $f(p)$.

d Quelle est l'image de 28,25 par cette fonction ? L'antécédent de 52,38 ?

e Que peux-tu dire de cette fonction ?

f Suite au changement de prix, le chiffre d'affaires du magasin a diminué de 15 % sur l'année. Sachant que l'an dernier il s'élevait à 550 000 €, quel est le chiffre d'affaires de cette année ?

3 Représentation graphique

Cours : 1-2

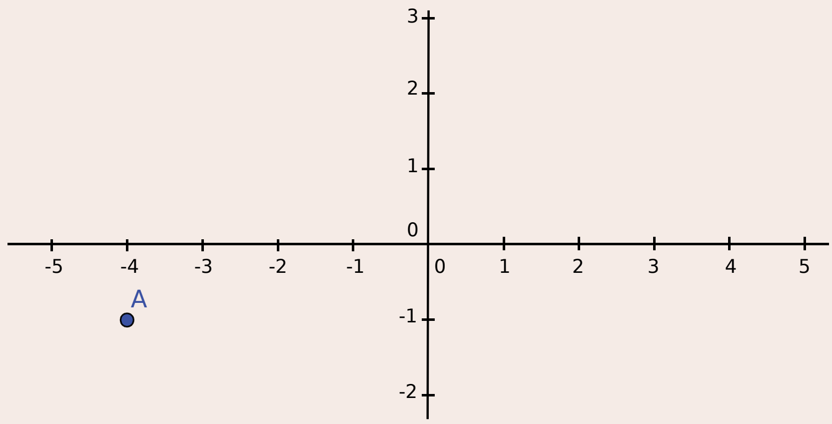
TICE Géométrie Dynamique

Soit f la fonction définie par $f(x) = 0{,}5x + 1$.

a Affiche la fenêtre *Tableur*.
Programme les cellules pour compléter le tableau de valeurs suivant.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$									

b Quelle est l'ordonnée du point A, d'abscisse -4, qui appartient à la courbe représentative de la fonction f ?



c Détermine de la même façon les coordonnées des points B, C, ... , I, d'abscisses respectives -3 ; -2 ; ... ; 4, qui appartiennent à cette courbe représentative.

d Place les points ainsi obtenus dans la fenêtre *Graphique*.
Comment semblent-ils positionnés ? Vérifie ta conjecture en faisant un tracé.

e Soit g la fonction définie par $g(x) = 3$. Construis un tableau de valeurs, puis place les points dans le repère. Quelles remarques peux-tu faire ?

f Même question pour la fonction h définie par $h(x) = -2x$.

g Dans une nouvelle fenêtre, trace les courbes représentatives des fonctions :
$f_1(x) = 2x + 3$; $f_2(x) = 2x$ et $f_3(x) = -2x + 3$. Que remarques-tu ?

4 Masses volumiques

Cours : 3

a Une pièce métallique en cuivre a un volume de 2,5 dm^3 et une masse de 22,3 kg.
De plus, on sait que 1 kg d'aluminium occupe un volume de 370 cm^3, et que la masse volumique de l'acier est de 7 850 kg/m^3. Calcule, en kg, la masse d'un décimètre cube de chacun de ces métaux.

b Une entreprise souhaite construire, pour un modèle de vélo, des cadres métalliques qui soient les plus légers possibles. Quel métal a-t-elle intérêt à choisir : le cuivre, l'aluminium ou l'acier ? Justifie ta réponse.

1 Fonction affine

→ 8 24 32

A Définition

Définition On appelle **fonction affine** une fonction qui, à tout nombre noté x, associe le nombre $a \times x + b$ (c'est-à-dire $x \longmapsto a \times x + b$), où a et b sont deux nombres fixés.

Exemple :

La fonction f définie par $f(x) = 3x - 2$ est une fonction affine (avec $a = 3$ et $b = -2$).

Remarques :

- Lorsque $a = 0$, la fonction est une **fonction constante**.
  À tout nombre x, cette fonction associe le nombre b.
- Lorsque $b = 0$, la fonction est une **fonction linéaire**.
  À tout nombre x, cette fonction associe le nombre ax.

B Image et antécédent

Propriété Tout nombre admet un **unique antécédent** par une fonction affine non constante.

Exemple :

Soit f la fonction affine telle que $f(x) = 3x - 2$.

- Calcule l'image de -7 par la fonction f.

  $f(x) = 3x - 2$ ⟶ On remplace x par -7.
  $f(-7) = 3 \times (-7) - 2$ ⟶ On calcule.
  $f(-7) = -21 - 2 = -23$ ⟶ L'image de -7 par la fonction f est -23.

- Calcule l'antécédent de 13 par la fonction f.

  $f(x) = 13$ ⟶ On cherche le nombre x qui a pour image 13.
  $3x - 2 = 13$ ⟶ On résout l'équation.
  $3x = 15$ donc $x = 5$ ⟶ L'antécédent de 13 par f est donc 5.

C Représentation graphique

Propriété La représentation graphique d'une **fonction affine** $f : x \longmapsto a \times x + b$ est une **droite**.

Définitions

- a s'appelle le **coefficient directeur** de la droite : il donne l'accroissement de $f(x)$ lorsque x augmente d'une unité.
- b s'appelle l'**ordonnée à l'origine** : $f(0) = b$.
  La droite passe par le point de coordonnées $(0 ; b)$.

Exemple : Représente graphiquement la fonction affine f définie par $f : x \longmapsto 3x - 2$.

f est une fonction affine. Sa représentation graphique est donc une droite.

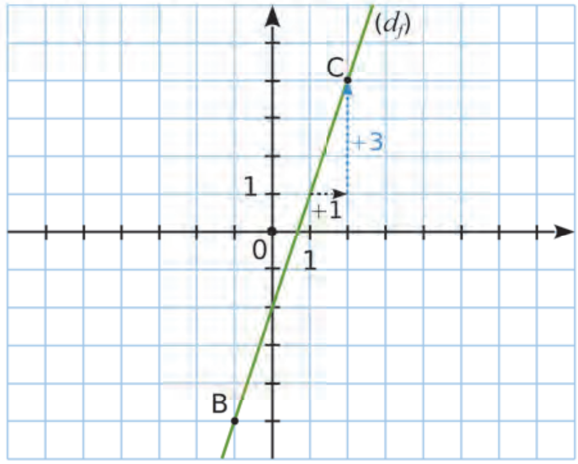
Pour la tracer, il suffit de connaitre les coordonnées de deux de ses points.

- $f(-1) = 3 \times (-1) - 2 = -3 - 2 = -5$
- $f(2) = 3 \times (2) - 2 = 6 - 2 = 4$

On trace (d_f) qui passe par les points B(-1 ; -5) et C(2 ; 4).

On vérifie que la droite passe bien par le point de coordonnées (0 ; – 2).

Le coefficient directeur de cette droite est positif, donc la droite « monte » quand on regarde de gauche à droite.



2 Fonction linéaire

19 32

A Définition

Définition On appelle **fonction linéaire** de coefficient a la fonction qui, à tout nombre noté x, associe le nombre $a \times x$ (c'est-à-dire $x \longmapsto a \times x$), où a est un nombre fixé.

Exemples : Les fonctions f et g définies par $f(x) = 2{,}5x$ et $g(x) = -0{,}5x$ sont linéaires.

Remarque : Une fonction linéaire est une fonction affine particulière (cas où $b = 0$).

B Représentation graphique

Propriété La représentation graphique d'une **fonction linéaire** est une **droite** passant par l'**origine** du repère.

Exemple : Représente graphiquement la fonction linéaire g définie par $g(x) = -0{,}5x$.

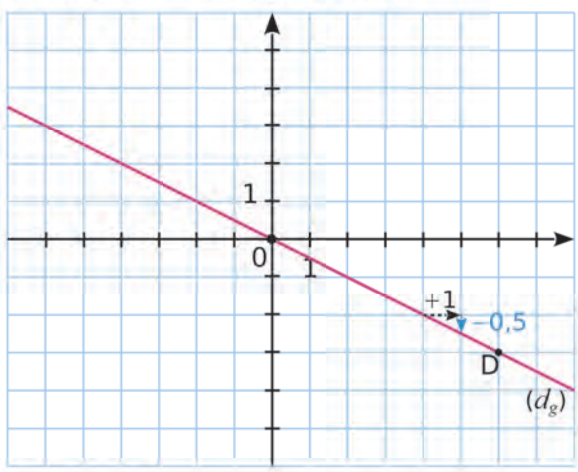
g est une fonction linéaire. Sa représentation graphique est donc une droite qui passe par l'origine du repère.

Pour la tracer, il suffit de connaitre les coordonnées d'un de ses points : on calcule l'image d'un nombre par la fonction g.

$g(6) = -0{,}5 \times (6) = -3$

On trace (d_g) qui passe par le point D(6 ; – 3) et par l'origine du repère.

Le coefficient directeur de cette droite est négatif, donc la droite « descend » quand on regarde de gauche à droite.



3 Proportionnalité

→ 53 64

A Fonction linéaire et proportionnalité

Propriété Toute situation de **proportionnalité** peut être modélisée par une fonction linéaire.

Exemple 1 :
Le périmètre d'un carré est proportionnel à la mesure de son côté.
Cette situation peut être modélisée par la fonction linéaire p qui, à tout nombre x, associe $4x$.

Exemple 2 :
Un marchand vend ses pommes à 2,50 € le kilo. Le prix des pommes est proportionnel à leur masse. La fonction linéaire $f(x) = 2{,}50x$ traduit cette situation de proportionnalité.

L'image de 5 par f est : $f(5) = 12{,}5$. Cela signifie que 5 kg de pommes valent 12,50 €.

La représentation graphique de f représente donc le prix payé en fonction de la masse des pommes.

B Pourcentages

Propriété

- Pour augmenter un nombre de x %, on multiplie ce nombre par $1 + \frac{x}{100}$.
- Pour baisser un nombre de x %, on multiplie ce nombre par $1 - \frac{x}{100}$.

Exemple 1 :
Un pantalon coute 70 €. Son prix augmente de 20 %.

Pour trouver le nouveau prix, il suffit donc de multiplier le prix de départ par $1 + \frac{20}{100} = 1{,}20$.

$70 \times 1{,}20 = 84$. Après augmentation, le prix est de 84 €.

Exemple 2 :
Un village comptait 800 habitants. En 5 ans, la population a diminué de 7,5 %.
Pour trouver le nouveau nombre d'habitants, il suffit de multiplier le nombre de départ par : $1 - \frac{7{,}5}{100} = 0{,}925$.

$800 \times 0{,}925 = 740$. Ce village compte désormais 740 habitants.

C Grandeurs composées

Exemple 1 :
On exprime une **vitesse** moyenne en kilomètres par heure. C'est une **grandeur quotient**.
Ainsi, pour convertir 72 km/h en m/s, on procède ainsi :
72 km/h = 72 000 m/1 h = 72 000 m/3 600 s = 20 m/s.

Exemple 2 :
On exprime une **consommation** électrique en kilowatt-heures. C'est une **grandeur produit**.

Ainsi, pour déterminer la consommation électrique réclamée par l'éclairage de 3 ampoules de 75 W pendant 5 h 30 min, on procède ainsi :

3 × 75 W × 5 h 30 min = 3 × 75 W × 5,5 h = 1 237 Wh = 1,237 kWh.

Voir aussi les Questions FLASH dans le manuel numérique !

À l'oral !

1 Les fonctions affines suivantes ont une expression de la forme $ax + b$. Donne pour chacune d'elles les valeurs de a et de b.

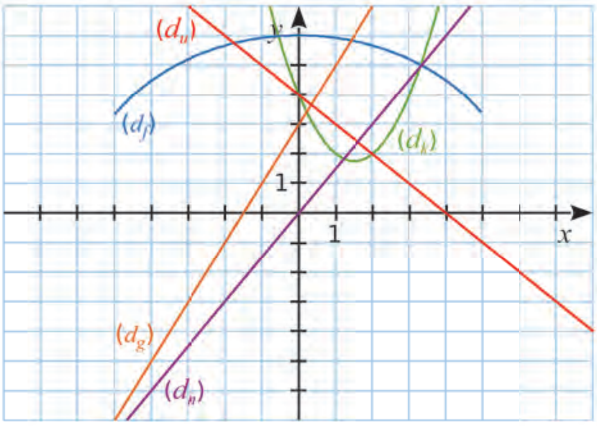
a. $f(x) = 5x - 1$

b. $f(x) = -x - 3$

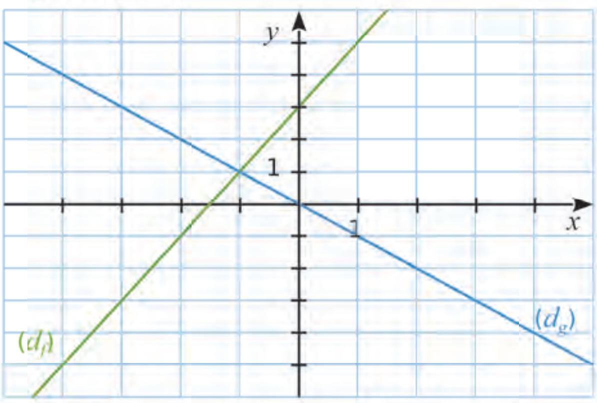
c. $f(x) = 7x$

d. $f(x) = 5 + 2x$

2 Parmi les fonctions f, g, h, k et u représentées ci-dessous, indique celles qui sont affines. (Tu préciseras celle qui est linéaire.)



3 Le graphique ci-dessous représente les fonctions f et g.



a. Donne les images, par chacune des deux fonctions, des nombres 0 ; 1 et – 4.

b. Donne les antécédents, par chacune des deux fonctions, des nombres 3 ; – 3 et 5.

c. Donne le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine de la droite (d_f). Déduis-en l'expression de $f(x)$.

d. Donne l'expression de $g(x)$.

4 QCM

a. Soit f la fonction linéaire définie par $f(x) = 7{,}5x$. Pour déterminer l'antécédent de 1 par f, il faut effectuer...

R.1	R.2	R.3
$7{,}5 \times 1$	$7{,}5 \div 1$	$1 \div 7{,}5$

b. g est une fonction affine telle que $g(2) = -1$. Parmi les expressions suivantes, laquelle ne peut pas être celle de $g(x)$?

R.1	R.2	R.3
$10x - 21$	$\frac{1}{2}x - 2$	$2x - 1$

c. La vitesse du son, 300 m/s, vaut environ...

R.1	R.2	R.3
1 800 km/h	1 080 km/h	500 km/h

5 La masse volumique du cuivre est de 9 g/cm³. Combien pèse une statue en cuivre de volume 0,5 dm³ ?

6 Un magasin propose des promotions sur de nombreux articles.

a. Un article vendu habituellement à 50 € est affiché à 35 €. Quel pourcentage de remise est accordé ?

b. Un autre article, valant 24 € avant les promotions, bénéficie d'une remise de 25 %. Combien coute-t-il désormais ?

c. Un dernier article, affiché avec une remise de 10 %, coute 36 €. Quel était son prix avant les promotions ?

Fonctions affines, fonctions linéaires

7 **QCM**

a. La fonction f définie par $f(x) = 12x - 3x$ est...

R.1	R.2	R.3
constante	linéaire	non affine

b. La fonction g définie par :
$g(x) = 3x - (2x + 7) + (3x + 75)$ est...

R.1	R.2	R.3
affine	constante	non affine

8 Parmi les fonctions f, g, h et k définies ci-dessous, indique celles qui sont affines.

a. $f(x) = 5 + 2x$

b. $g(x) = 3x - 4$

c. $h(x) = x^2$

d. $k(x) = (5 - 2x) - 10$

9 Même exercice.

a. $s(x) = 21x$

b. $t(x) = -x - 2$

c. $u(x) = 3(2x + 2)$

d. $v(x) = \frac{3}{x} + 2$

10 Même exercice avec les fonctions m, n, p et q définies ci-dessous.

a. $m(x) = 5x$

b. $n(x) = 2x + 7$

c. $p(x) = (4x - 7) - 4x$

d. $q(x) = 2x^3$

11 Parmi les fonctions des exercices **9** et **10**...

a. laquelle (lesquelles) est (sont) linéaire(s) ?

b. laquelle (lesquelles) est (sont) constante(s) ?

12 Classe les fonctions suivantes dans un tableau identique à celui ci-dessous.

- $f : x \longmapsto -1{,}8x$
- $g : x \longmapsto \frac{4}{3}$
- $h : x \longmapsto 1 - x^2$
- $k : x \longmapsto 6 + \frac{1}{2}x$
- $l : x \longmapsto -7{,}2$
- $m : x \longmapsto \frac{4}{9}x$
- $n : x \longmapsto -4x + 7$
- $p : x \longmapsto -\frac{3}{x} + 2$

Fonction affine			Fonction non affine
linéaire	constante	ni l'un ni l'autre	

Image, antécédent(s)

13 La fonction f est définie par $f(x) = 8x$.
Recopie et complète le tableau suivant.

x	-3	$-1{,}25$	0	$\frac{1}{8}$	2	4,5
$f(x)$						

14 La fonction g est définie par $g : x \longmapsto -6x$.
Recopie et complète le tableau suivant.

x	-5		0		$\frac{5}{3}$	
$g(x)$		6		$-\frac{3}{4}$		-42

15 Soit la fonction linéaire h telle que $h(1) = -4$.

a. Sans déterminer le coefficient de h, calcule :

- $h(4)$ • $h(-2{,}5)$ • $h\left(\frac{5}{3}\right)$

b. Quel est le coefficient de h ?

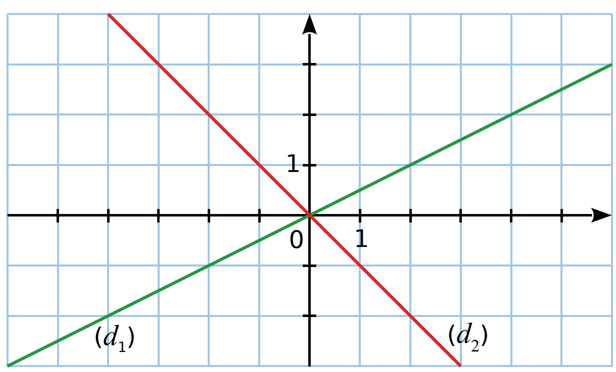
16 Soit la fonction linéaire k telle que $k(-4) = -1$.

a. Sans déterminer le coefficient de k, calcule :

- $k(4)$ • $k(-2)$ • $k\left(\frac{20}{3}\right)$

b. Quel est le coefficient de k ?

17 (d_1) et (d_2) sont les représentations graphiques respectives des fonctions f_1 et f_2.



Recopie et complète le tableau suivant.

x	-4	-2	-1	0	1	3
$f_1(x)$						
$f_2(x)$						

18 l est la fonction linéaire telle que $l(2) = 0$.

a. Quelle est l'image de 5 par l ?

b. Que peux-tu dire de cette fonction l ?

19 Soit m la fonction linéaire telle que $m(5) = -35$. Donne l'expression de $m(x)$. Justifie.

20 On considère le programme de calcul :
« Multiplier par 3 et soustraire 4 ».

a. f est la fonction qui, à un nombre x, associe le résultat obtenu lorsqu'on applique le programme de calcul au nombre x. Donne l'expression de $f(x)$.

b. Si on applique le programme de calcul au nombre 5, quel nombre obtient-on ? Traduis ce résultat par une phrase comportant le mot « image ».

c. À quel nombre faut-il appliquer le programme de calcul pour obtenir 23 comme résultat ? Traduis ce résultat par une phrase comportant le mot « antécédent ».

21 La fonction g est définie par $g(x) = -5x + 1$. Recopie et complète le tableau suivant.

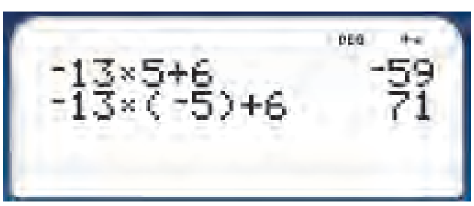
x	-3	$-2{,}1$	$-\frac{1}{5}$	0	5	7
$g(x)$						

22 La fonction h est définie par $h(x) = \frac{1}{2}x + 2$.

Recopie et complète le tableau suivant.

x		-7		6		50
$h(x)$	-18		0		7,5	

23 Stella a utilisé sa calculatrice pour déterminer les images de deux nombres par une même fonction f.



a. La fonction f est-elle affine ? Explique.

b. Écris deux phrases contenant chacune le mot « image ».

c. Écris deux phrases contenant chacune le mot « antécédent ».

24 k est définie par $k : x \longmapsto 2x - 5$.

a. Calcule l'image de 0, puis celle de 1.

b. Calcule $k(-4)$ et $k\left(\frac{1}{4}\right)$.

c. Résous l'équation $k(x) = 0$. Que peux-tu dire de la solution de cette équation ?

d. Calcule l'antécédent de 1, puis celui de 15.

25 Pour mesurer la température, Il existe différentes unités : en France, on utilise le degré Celsius (°C) ; aux États-Unis, on utilise le degré Fahrenheit (°F).

Pour passer des degrés Celsius aux degrés Fahrenheit, on multiplie le nombre de départ par 1,8 puis on ajoute 32 au résultat.

a. Un thermomètre en degrés Fahrenheit est plongé dans un seau d'eau gelée. Qu'indique-t-il ?

b. Un thermomètre en degrés Celsius est plongé dans une casserole d'eau à 212°F. Que se passe-t-il à cette température ?

On note x la température en degrés Celsius et $f(x)$ la même température en degrés Fahrenheit.

c. Exprime $f(x)$ en fonction de x.

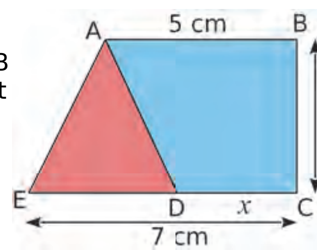
d. Comment nomme-t-on ce type de fonction ?

e. Calcule $f(10)$ et $f(-30)$.

f. Quel est l'antécédent de 41 par la fonction f ?

g. Existe-t-il une valeur pour laquelle la température exprimée en degrés Celsius est égale à la température exprimée en degrés Fahrenheit ? Justifie ta réponse.

26 ABCE est un trapèze rectangle en B et en C. D est un point variable du segment [EC], et on note x la longueur du segment [DC] en cm.



a. Donne les valeurs entre lesquelles x varie.

b. Montre que l'aire du trapèze ABCD est $10 + 2x$ et que l'aire du triangle ADE est $14 - 2x$.

c. Calcule l'aire du triangle ADE, puis celle du trapèze ABCD : pour $x = 4$ cm, puis pour $x = 6{,}5$ cm.

d. Pour quelle valeur de x l'aire du triangle ADE est-elle égale à 12 cm^2 ?

e. Même question pour le trapèze ABCD.

f. Calcule la valeur de x pour laquelle le triangle ADE et le trapèze ABCD ont la même aire.

27 TICE Tableur

On considère les fonctions f et g définies par $f(x) = -8x$ et $g(x) = -6x + 4$.

a. Reproduis la feuille de calcul suivante.

	A	B	C	D	E
1	x	-3	0	2	
2	$f(x) = -8x$				
3	$g(x) = -6x + 4$				
4					

b. Quelle formule peut-on saisir dans la cellule B2 ? Recopie-la vers la droite et complète la ligne 2, jusqu'en E2. Complète aussi la ligne 3.

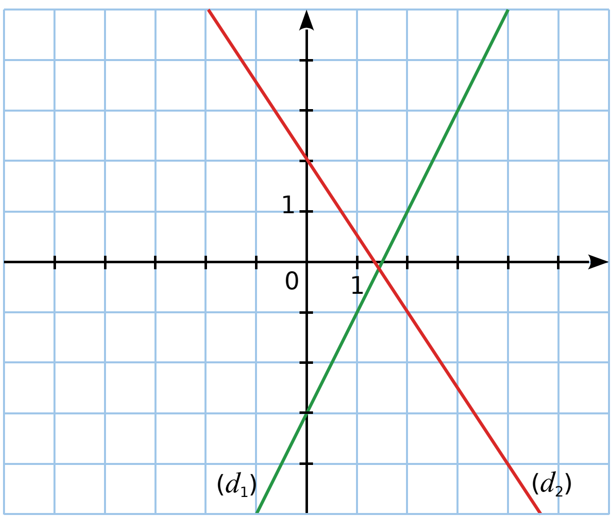
c. Quel nombre faut-il saisir en E1 pour que la cellule E2 contienne le nombre -24 ?
Que contient alors la cellule E3 ?

On définit une nouvelle fonction h par
$h : x \longmapsto f(x) \times g(x)$.

d. La fonction h est-elle affine ?

e. Utilise ta feuille de calcul pour déterminer le(s) antécédent(s) de 0 par la fonction h.

28 (d_1) et (d_2) sont les représentations graphiques respectives des fonctions f_1 et f_2.



a. Recopie et complète le tableau suivant.

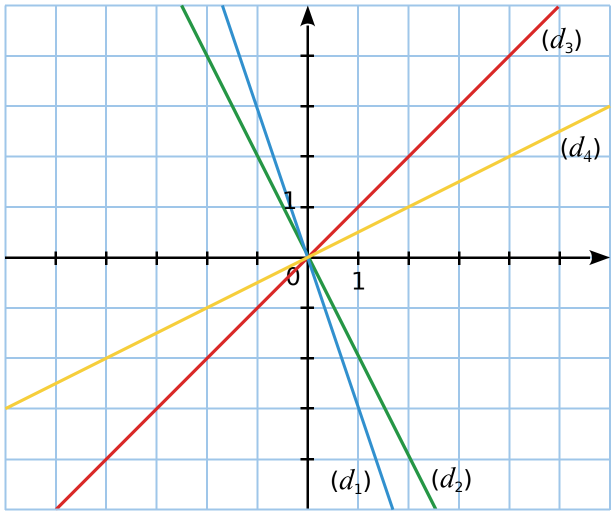
x	-1	0	1	2	3	4
$f_1(x)$						
$f_2(x)$						

b. Quelle est l'image de -1 par f_1 ? Par f_2 ?

c. Quel est l'antécédent de -1 par f_1 ? Par f_2 ?

Déterminer graphiquement une fonction affine

29 Les droites (d_1), (d_2), (d_3) et (d_4) sont les représentations graphiques respectives des quatre fonctions linéaires f_1, f_2, f_3 et f_4.



a. Qu'ont en commun ces quatre droites ?

b. Lis graphiquement $f_1(1)$, $f_2(1)$, $f_3(1)$ et $f_4(1)$.

c. Déduis-en le coefficient directeur, puis l'expression, de chaque fonction.

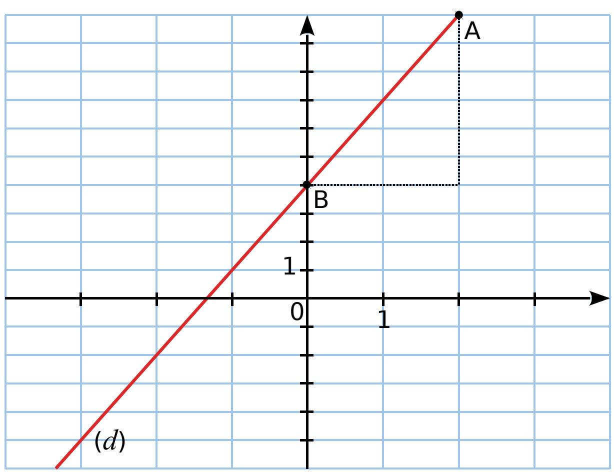
30 Soit g la fonction affine qui, à un nombre x, associe le nombre $3x + 4$.

a. Calcule les rapports suivants.

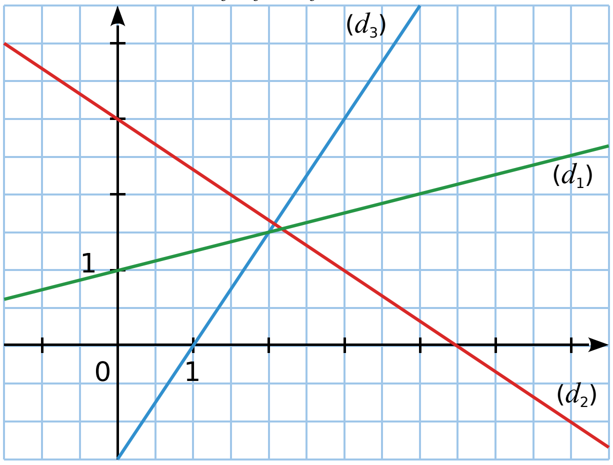
- $\dfrac{g(2) - g(0)}{2 - 0}$
- $\dfrac{g(-1) - g(1)}{(-1) - 1}$
- $\dfrac{g(-3) - g(-1)}{-3 - (-1)}$

b. Que remarques-tu ?

c. (d) est la représentation graphique de la fonction g. Interprète graphiquement les rapports de la question **a**.



31 Les droites (d_1), (d_2) et (d_3) sont les représentations graphiques respectives de trois fonctions affines : f_1, f_2 et f_3.



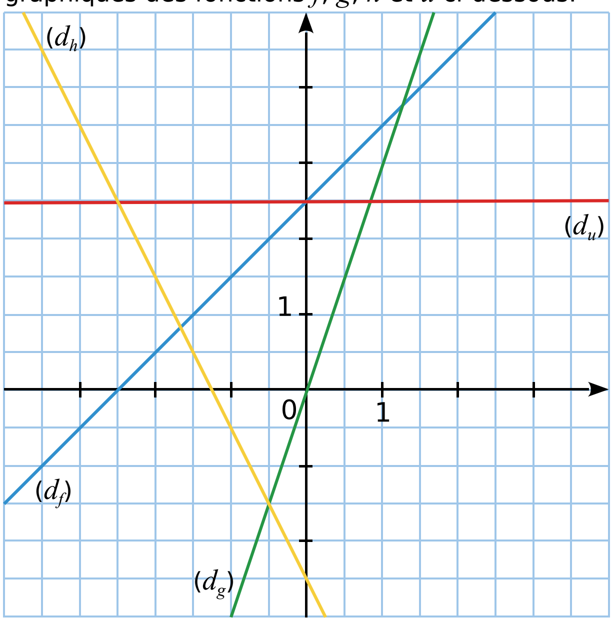
a. Détermine la (les) fonction(s) qui ont un coefficient directeur négatif.

b. Détermine le coefficient directeur de chaque fonction, sous la forme d'une fraction.

c. Indique l'ordonnée à l'origine de chaque droite.

d. Déduis-en l'expression de chaque fonction.

32 On considère les représentations graphiques des fonctions f, g, h et u ci-dessous.



a. Parmi les fonctions affines f, g, h et u :

- laquelle est linéaire ?
- laquelle est constante ?
- lesquelles ont un coefficient directeur positif ? Négatif ? Nul ?

b. Détermine le coefficient directeur de chaque fonction.

c. Indique l'ordonnée à l'origine de chaque droite.

d. Déduis-en l'expression de chaque fonction.

Déterminer une fonction affine par le calcul

33 Soient f_1 et f_2 deux fonctions linéaires telles que : $f_1(3) = 15$ et $f_2(-3) = 21$.
Détermine les fonctions f_1 et f_2.

34 Soient g_1 et g_2 deux fonctions linéaires telles que : $g_1(15) = 3$ et $g_2(21) = -3$.
Détermine les fonctions g_1 et g_2.

35 Soient f et g deux fonctions affines telles que :

- $f(0) = 6$ et $f(4) = -30$
- $g(0) = -3$ et $g(4) = 13$

a. Détermine les ordonnées à l'origine b_f et b_g correspondant à chaque fonction.

b. Détermine les fonctions f et g.

36 Recopie et associe chaque fonction aux égalités qui lui correspondent.

$f(x) = 6x - 7$ •	• $f(-3) = 25$ et $f(5) = -23$
$f(x) = 6x + 7$ •	• $f(-3) = 11$ et $f(5) = -37$
$f(x) = -6x - 7$ •	• $f(-3) = -25$ et $f(5) = 23$
$f(x) = -6x + 7$ •	• $f(-3) = -11$ et $f(5) = 37$

37 $f(x)$ est une fonction affine de la forme $ax + b$ telle que : $f(-5) = -9$ et $f(5) = 11$.
On souhaite déterminer l'expression de f, c'est-à-dire déterminer a et b.

a. Calcule le coefficient directeur de f en utilisant la formule : $a = \dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$.

b. Détermine l'expression de f.

38 Détermine les fonctions affines f_1 et f_2 telles que :

- $f_1(1) = 4{,}5$ et $f_1(4) = 12$
- $f_2(2) = -3{,}5$ et $f_2(-1) = 11{,}5$

39 Détermine les fonctions affines l_1 et l_2 telles que :

- $l_1(5) = -10$ et $l_1(10) = -17$
- $l_2(2) = 5$ et $l_2(-4) = -10$

Représentation graphique

40 **QCM**

On considère la fonction affine f définie par $f(x) = x + 4$, et on note (d) sa représentation graphique.

a. La droite (d) a pour coefficient directeur...

R.1	R.2	R.3
0	1	4

b. La droite (d) passe par le point de coordonnées...

R.1	R.2	R.3
(1 ; 4)	(– 10 ; – 14)	(– 10 ; – 6)

c. La droite (d) coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées...

R.1	R.2	R.3
(– 4 ; 0)	(4 ; 0)	(0 ; 4)

41 La fonction linéaire g est définie par $g(x) = -1{,}5x$.

a. Quelle est la nature de sa représentation graphique ?

b. Combien de points sont nécessaires pour représenter graphiquement cette fonction ?

c. Recopie et complète le tableau suivant.

x	– 4	– 3	– 2	– 1	0	1	2	3	4
$g(x)$									

d. Construis la représentation graphique de cette fonction, en prenant 1 cm pour 1 unité en abscisse, et 1 cm pour 2 unités en ordonnée.

42 La fonction affine h est définie par $h(x) = 3x - 5$.

a. Quelle est la nature de sa représentation graphique ?

b. Combien de points sont nécessaires pour représenter graphiquement cette fonction ?

c. Recopie et complète le tableau suivant.

x	– 3	– 2	– 1	0	1	2	3
$h(x)$							

d. Construis la représentation graphique de cette fonction, en prenant 1 cm pour 1 unité en abscisse et en ordonnée.

43 On considère les fonctions affines suivantes.

- $f : x \longmapsto -2x + 1$
- $g : x \longmapsto -x + 3$
- $h : x \longmapsto 2{,}5x$
- $k : x \longmapsto 3x - 4$
- $l : x \longmapsto 2$
- $m : x \longmapsto -2x - 3$

a. Représente ces fonctions dans un même repère avec des couleurs différentes.

b. Que dire des représentations graphiques des fonctions f et m ? À ton avis, pourquoi ?

44 **TICE Tableur**

On considère les fonctions f et g définies par $f(x) = 2x$ et $g(x) = -2x + 8$.

a. Quelle est la nature de la fonction f ? De g ?

b. Reproduis la feuille de calcul suivante.

	A	B	C	D	E	F
1	x	– 10	– 5	0	5	10
2	Image de x					
3						
4	x	– 10	– 5	0	5	10
5	Image de x					

c. En B2, saisis la formule =2*B1, puis recopie-la vers la droite. La ligne 2 contient alors les images des nombres de la ligne 1 par une fonction. Laquelle ?

d. Quelle formule peux-tu saisir en B5 ? Recopie-la vers la droite et complète alors la ligne 5.

e. Est-il vrai que $f(-10) < g(-10)$?

f. Peut-on affirmer que $f(x) < g(x)$? Explique.

g. Dans un même repère, représente graphiquement les fonctions f et g.

h. Existe-t-il des nombres ayant la même image par f et par g ? Si oui, combien ? Lesquels ? Justifie tes réponses.

45 La fonction h est une fonction affine telle que : $h(2) = -1$ et $h(-1) = 5$.

a. Représente graphiquement la fonction h.

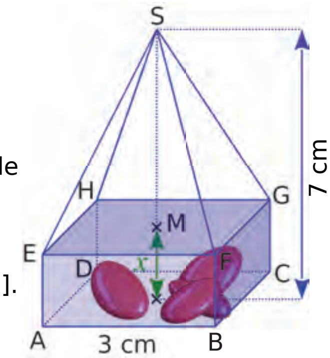
b. Détermine graphiquement l'image du nombre 3 par la fonction h, et l'antécédent du nombre – 2 par cette même fonction.

c. Parmi les expressions ci-dessous, retrouve celle qui correspond à $h(x)$. Explique ta démarche.

$h(x) = -\frac{1}{2}x + 3$	$h(x) = 3x - 7$	$h(x) = -2x + 3$

Modélisation

46 Cette boite de dragées, de hauteur totale 7 cm, est composée :
- d'un parallélépipède rectangle ABCDEFGH de base un carré ABCD et de hauteur variable x,
- d'une pyramide SEFGH de hauteur [SM].
M est le centre de la face EFGH.



a. Exprime, en fonction de x, le volume :
- $\mathcal{V}_1(x)$ du parallélépipède ABCDEFGH ;
- $\mathcal{V}_2(x)$ de la pyramide SEFGH.

b. Dans un repère, trace la représentation graphique des fonctions $\mathcal{V}_1$ et $\mathcal{V}_2$.
Tu prendras 2 cm pour 1 unité en abscisse, et 2 cm pour 10 unités en ordonnée.

c. Pour quelle valeur de x, ces deux volumes sont-ils égaux ? Détermine-le d'abord graphiquement, puis par le calcul.

d. Pour quelle valeur de x le volume du parallélépipède est-il le double de celui de la pyramide ?

47 En magasin, une cartouche d'encre pour imprimante coute 15 €. Sur Internet, cette même cartouche coute 10 €, auxquels il faut ajouter des frais de livraison fixes de 40 €, quel que soit le nombre de cartouches achetées.

a. Recopie et complète le tableau suivant.

Nombre de cartouches	2	5	11	14
Prix en magasin (€)		75		
Prix à payer par Internet (€)		90		

b. On note $P_A(x)$ le prix à payer pour l'achat de x cartouches en magasin. Détermine $P_A(x)$.

c. On note $P_B(x)$ le prix à payer pour l'achat de x cartouches par Internet. Détermine $P_B(x)$.

d. Représente les fonctions P_A et P_B.

e. Utilise ce graphique pour répondre aux questions suivantes. (Tu laisseras apparents les pointillés utiles.)
- Détermine le prix le plus avantageux pour l'achat de six cartouches.
- Sonia dispose de 80 € pour acheter des cartouches. A-t-elle intérêt à les acheter en magasin ou sur Internet ?

f. À partir de combien de cartouches le prix sur Internet est-il inférieur ou égal à celui en magasin ? Explique ta réponse.

Proportionnalité

48 José travaille pour un site de vente en ligne. Il passe en moyenne 3 min 30 s pour préparer une commande.

a. Recopie et complète le tableau suivant.

Nombre de commandes	1	2	4	8	12
Temps de préparation (min)					

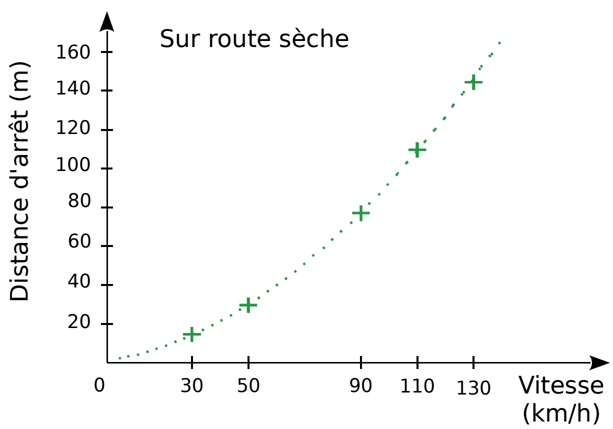
b. Que peut-on dire du temps passé et du nombre de commandes traitées ?

c. On note x le nombre de commandes traitées, et $f(x)$ le temps de préparation associé. Exprime $f(x)$ en fonction de x.

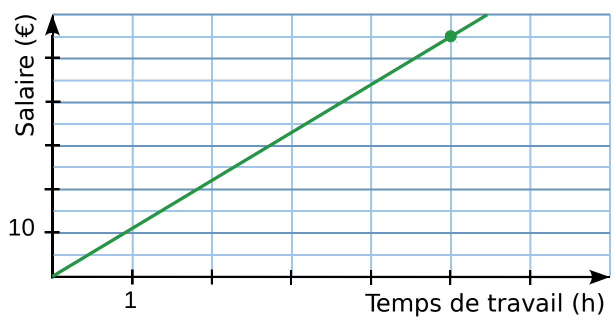
d. Que dire des points du graphique représentant le temps passé en fonction du nombre de commandes traitées ? Justifie ta réponse.

e. Recopie et complète la phrase suivante : « *Toute situation … se caractérise graphiquement par des points …* ».

49 La distance d'arrêt est-elle proportionnelle à la vitesse du véhicule ? Justifie ta réponse.



50 Le graphique ci-dessous représente le salaire de Paul, en euros, en fonction du nombre d'heures travaillées.



Ce mois-ci, il a travaillé 150 heures. Combien sera-t-il payé ? Justifie ta démarche.

Pourcentage d'évolution

51 Sur l'étiquette ci-dessous, quel est le nombre masqué ?

52 L'ancien prix masqué ci-dessous est-il 63,70 € ? Si non, quel est-il ?

53 Le prix hebdomadaire de la location d'un bateau à moteur dépend de la période. Il est de 882 € en basse saison, et majoré de 27 % en pleine saison.

Calcule le prix de la location d'un bateau à moteur pour une semaine en pleine saison.

54 Léa a besoin de nouveaux cahiers. Elle compare les offres promotionnelles ci-dessous. Pour le modèle dont elle a besoin, le prix avant promo était le même dans les trois magasins.

Papyrus	Feuille à feuille	Paperstory
Vente à l'unité ou lot de 3 cahiers au prix de 2 !	Un cahier acheté, le 2e à moitié prix !	30 % de réduction sur les cahiers !

a. Quel magasin doit-elle choisir si elle veut acheter un cahier ? Deux cahiers ? Trois cahiers ?

La carte de fidélité de « Paperstory » permet d'obtenir 10 % de réduction sur le ticket de caisse, y compris sur les articles en promotion.

b. Léa utilise cette carte de fidélité pour acheter un cahier. Quel pourcentage de réduction totale va-t-elle obtenir ?

55 ***Évolution d'une colonie de manchots***

Au début de l'année, une colonie de manchots est constituée de 5 000 couples.

Au printemps, chaque couple élève un poussin. À la fin de l'année, la population de manchots (adultes et poussins) est diminuée de 20 % (à cause des maladies, des intempéries, des prédateurs...).

À la fin de l'année, combien de manchots (adultes et poussins) y aura-t-il dans cette colonie ?

56 ***Mercredi, ce sont les soldes !***

Collées sur une vitrine, de grandes affiches annoncent une réduction de 30 % sur toute la boutique.

a. Une jupe à 80 € est soldée. Quel est son nouveau prix ? Détaille tes calculs.

b. Un article coutant x € est soldé. Exprime $p(x)$, son nouveau prix, en fonction de x.

c. Cette fonction p est-elle linéaire ?

d. Sur une feuille de papier millimétré, représente la fonction p pour les valeurs de x comprises entre 0 € et 150 €. Place l'origine du repère dans le coin inférieur gauche. Tu prendras 1 cm pour 10 € en abscisse et en ordonnée.

e. Lis sur le graphique le prix soldé d'un pull qui coutait 50 €.

f. Lis sur le graphique le prix avant démarque d'un pantalon soldé à 84 €.

57 ***Hausse de salaire***

a. Radou a vu son salaire mensuel passer de 1 450 € à 1 537 €. De quel pourcentage a-t-il été augmenté ?

b. Gina a été augmentée dans les mêmes proportions. Son précédent salaire était de 1 700 €. Quel est son salaire désormais ?

c. Romaric a lui aussi été augmenté dans les mêmes proportions. Il gagne désormais 2 332 €. Quel était son précédent salaire ?

58 ***Mutualisation des efforts***

Tous les employés d'une entreprise ont décidé de cotiser à la même assurance maladie. La cotisation, prélevée directement sur leur salaire, correspond à 1,5 % de leur salaire brut.

a. On appelle s le salaire brut mensuel.
Exprime, en fonction de s, le montant $c(s)$ de la cotisation de chacun.

b. La comptable est chargée de modifier le bulletin de paie, programmé sur un tableur.
Voici une partie de la feuille de calcul.

	A	B	C
1	Éléments	À payer	À déduire
2	Salaire brut	1600	
....			
12	Assurance maladie		

Quelle formule doit-elle programmer en C12 ?

59 QCM

a. Lorsqu'on passe de 60 à 75, on augmente de...

R.1	R.2	R.3
15 %	20 %	25 %

b. Un loyer est augmenté de 10 % durant l'été, puis le propriétaire le diminue de 10 % en septembre. Globalement, le loyer...

R.1	R.2	R.3
a diminué	est inchangé	a augmenté

c. Un chef d'entreprise a augmenté son salaire de 140 %. Celui-ci a ainsi été multiplié par...

R.1	R.2	R.3
1,4	2,4	140

60 Pour les soldes d'hiver, les prix du magasin TrôBô ont diminué de 20 % la première semaine, puis de 10 % supplémentaires la deuxième semaine.

a. Un article coutait 40 €.
Calcule son prix lors de la deuxième semaine des soldes.

b. On appelle x le prix d'un article, en euros, avant les soldes.
Exprime, en fonction de x, son prix lors de la deuxième semaine des soldes.

c. Le prix de cet article a-t-il diminué de 30 % ?

d. Un article est affiché à 38,52 € lors de la deuxième semaine des soldes.
Calcule son prix non soldé.

Grandeurs composées

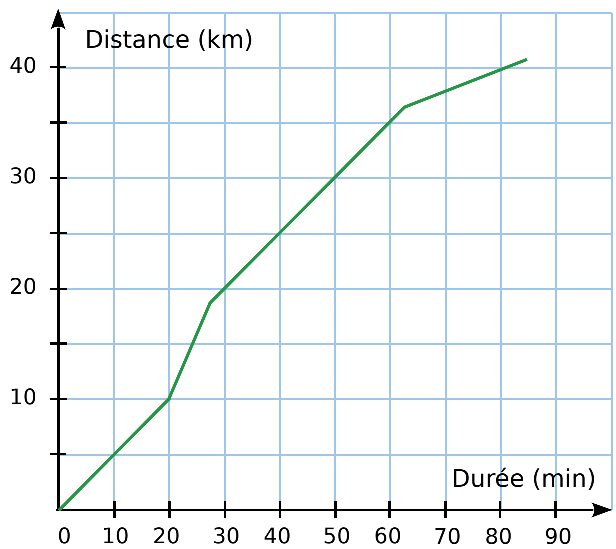
61 Le 27 janvier 2012, peu avant 16 h, un séisme de magnitude 5,4 sur l'échelle de Richter s'est produit dans la province de Parme, dans le nord de l'Italie. La secousse a été ressentie fortement à Gênes, Milan, Turin, mais également, dans une moindre mesure, à Cannes, dans les Alpes Maritimes.

Les ondes sismiques ont mis 59 secondes pour parvenir à Cannes, située à 320 km de l'épicentre.

Calcule la vitesse de propagation des ondes sismiques, exprimée en km/s et arrondie au dixième.

62 Cédric s'entraine pour l'épreuve de vélo d'un triathlon.

La courbe ci-dessous représente la distance parcourue en fonction du temps écoulé.



a. Quelle distance Cédric a-t-il parcourue au bout de 20 minutes ?

b. Combien de temps Cédric a-t-il mis pour faire les 30 premiers kilomètres ?

c. Le circuit emprunté par Cédric comprend une montée, une descente et deux portions plates. Reconstitue, dans l'ordre, le trajet parcouru par Cédric.

d. Calcule la vitesse moyenne de Cédric, exprimée en km/h, sur la première des quatre parties du trajet.

63 Le moteur d'une moto tourne à la vitesse de 5 000 tours/min. Convertis cette vitesse en nombre de tours par seconde.

64 La vitesse commerciale d'un TGV est en moyenne de 300 km/h.

a. Combien de kilomètres parcourt-il en 10 min ?

b. Calcule sa vitesse moyenne en km/min.

c. Calcule cette vitesse en m/s. Tu arrondiras le résultat à l'unité.

65 Julien envisage de faire le trajet Lille-Marseille en voiture. Voici les renseignements qu'il trouve sur Internet :

59 000 Lille – 13 000 Marseille

Distance : 1 004 km dont 993 sur autoroute

Temps : 8 h 47 dont 8 h 31 sur autoroute

Cout estimé : péage : 73,90 €
carburant : 89,44 €

a. Quelle vitesse moyenne, arrondie au km/h, cet itinéraire prévoit-il pour la portion de trajet sur autoroute ?

b. Sachant que la sécurité routière préconise au moins une pause de 10 à 20 minutes toutes les deux heures de conduite, quelle durée minimale Julien doit-il prévoir ?

c. Le réservoir de sa voiture a une capacité de 60 L. Un litre d'essence coute 1,42 €. Peut-il faire le trajet avec un seul plein d'essence, s'il se fie aux données du site Internet ? Explique ta démarche.

66 Voici les vitesses atteintes par les cinq mammifères terrestres les plus rapides au sprint.

Antilope : 88 000 $m \cdot h^{-1}$;
Chevreuil : 27,22 $m \cdot s^{-1}$;
Springbok : 0,0264 $km \cdot s^{-1}$;
Lion : 22,22 $m \cdot s^{-1}$;
Guépard : 0,030 6 $km \cdot s^{-1}$.

Classe ces champions dans l'ordre décroissant de leur vitesse.

67 La puissance P d'une plaque électrique est de 4 800 W.
Calcule l'énergie E, exprimée en kWh, consommée par cette plaque pendant 10 minutes. Utilise pour cela la formule $E = P \times t$, où t est la durée d'utilisation exprimée en h.

68 Un dépôt de carburant dispose de trois sphères de stockage de butane.

a. La plus grande sphère a un diamètre de 19,7 m. Montre que son volume de stockage est d'environ 4 000 m^3.

b. Tous les deux mois, 1 200 tonnes de butane sont importées sur le territoire. 1 m^3 de butane pèse 580 kg. Quel volume, en m^3, correspond aux 1 200 tonnes ? Arrondis à l'unité.

c. Les deux plus petites sphères ont des volumes de 1 000 m^3 et 600 m^3. Seront-elles suffisantes pour stocker les 1 200 tonnes de butane ou faudra-t-il recourir à la grande sphère ? Explique ta réponse.

69 Une plaque métallique a une masse surfacique de 15 kg/m^2.

a. Calcule la masse surfacique de cette plaque en g/cm^2.

b. Sachant que cette plaque a une forme rectangulaire, de longueur 30 cm et de largeur 17 cm, calcule la masse de cette plaque.

70 La masse volumique du zinc est de 7,14 kg/dm^3.

a. Quelle est, en grammes, la masse de 5 cm^3 de ce métal ?

b. Exprime la masse volumique du zinc en g/cm^3.

71 La masse volumique du mercure est égale à 13 600 kg/m^3.

Calcule le volume, en cm^3, d'un kilogramme de mercure.

72 Un passionné d'aviron rame à une cadence moyenne de 45 coups de rame par minute.

a. Calcule sa cadence en nombre de coups de rame par heure.

b. En combien de temps donne-t-il 1 000 coups de rame ? Arrondis le résultat à la seconde.

73 Un internaute a téléchargé un fichier de 1,6 Mo en 10 minutes.

a. Quelle est la vitesse de téléchargement en Mo/min ?

b. Exprime la vitesse de téléchargement en KiloOctets par seconde, arrondie au dixième.

c. Combien de temps faut-il pour télécharger un fichier de 0,98 Mo à cette vitesse ? Arrondis à la seconde.

74 On veut remplir une piscine de 15 m^3 à l'aide d'un robinet dont le débit est de 2 m^3/h.

a. Combien de temps faut-il pour remplir complètement cette piscine ?

b. Exprime le débit du robinet en L/min. Tu arrondiras le résultat au centième.

75 QCM

a. 126 km/h =

R.1	R.2	R.3
1,26 m/s	35 m/s	2,1 m/s

b. À la vitesse de 7 m/s, en roulant 50 minutes, on parcourt...

R.1	R.2	R.3
350 m	21 km	35 km

c. 1 cm^3 d'alcool pur pèse 8 dg. Combien pèse un litre d'alcool pur ?

R.1	R.2	R.3
1 kg	800 g	80 g

76 ***Perfusions***

Les personnels infirmiers doivent calculer le débit D d'une perfusion en gouttes par minute. Ils utilisent pour cela la formule suivante :

$$D = (dV) / (60N)$$

où d est le facteur d'écoulement en gouttes par millilitre (mL), V le volume (en mL) de la perfusion, et N le nombre d'heures que doit durer la perfusion.

a. Une infirmière veut doubler la durée de la perfusion. Explique quel est l'effet sur le débit D lorsqu'on double la valeur de N, sans modifier les valeurs de d et de V.

b. Une perfusion, d'un débit de 50 gouttes par minute, doit être administrée à un patient durant 3 heures. Pour cette perfusion, le facteur d'écoulement est de 25 gouttes par millilitre. Quel est le volume de cette perfusion ?

77 Un professeur d'éducation physique et sportive fait courir ses élèves autour d'un stade rectangulaire mesurant 90 m de long et 60 m de large.

a. Calcule la longueur d'un tour de stade.

b. Peio met 24 minutes pour effectuer 15 tours à vitesse constante. Combien de temps met-il pour faire un tour ? Tu donneras la réponse en minutes et secondes.

c. Mila parcourt six tours en neuf minutes. Calcule sa vitesse en m/min puis en km/h.

78 On sait que 1 mile ≈ 1,609 km.

a. La vitesse atteinte par une balle de tennis est de 95 miles par heure. Calcule la vitesse de cette balle en m/s. Arrondis le résultat au dixième.

b. Convertis la vitesse de l'image ci-dessous en miles par heure.

79 En France, l'énergie distribuée est mesurée en kilowatt-heures (kWh). Mais on peut aussi mesurer l'énergie en Joule, noté J.

L'équivalence se fait ainsi : 1 kWh = $3,6 \times 10^6$ J.

Pour les combustibles (gaz, bois, charbon...), les économistes utilisent comme unité la tonne équivalent pétrole (tep), qui correspond à la quantité d'énergie libérée par la combustion d'une tonne de pétrole.

On sait que 1 tep = $4,18 \times 10^{10}$ J.

Pour les trois questions ci-dessous, tu arrondiras les résultats au centième.

a. Une tonne de charbon a un pouvoir calorifique de $2,8 \times 10^{10}$ J. Exprime ce pouvoir en kWh, puis en tep.

b. Calcule, en kWh, l'énergie correspondant à 1 tep.

c. Selon l'Insee, l'énergie consommée par les transports, en France, en 2013, était égale à 154×10^6 tep. Exprime cette énergie en kWh.

80 ***Clip musical !***

Pour télécharger légalement des clips vidéo, un site propose les trois choix suivants :

- **Téléchargement visiteur** sans inscription : chaque clip est téléchargé pour 4 €
- **Téléchargement membre** : Inscription mensuelle de 10 € + 2 € par clip
- **Téléchargement premium** : Inscription mensuelle de 50 € + téléchargement illimité

a. Andy visite ce site pour la première fois et souhaite télécharger un seul clip. Quel choix lui conseilles-tu, et pourquoi ?

b. Reproduis et complète le tableau suivant.

Nombre de clips	1	2	5	10	15
Prix en € pour le téléchargement visiteur					
Prix en € pour le téléchargement membre					
Prix en € pour le téléchargement premium					

c. À partir de combien de clips devient-il intéressant de s'inscrire en tant que membre ?

On désigne par x le nombre de clips achetés, et on note f, g et h les fonctions définies par :

- $f(x) = 50$
- $g(x) = 4x$
- $h(x) = 2x + 10$

d. Associe chacune de ces fonctions au choix qu'elle représente (visiteur, membre ou premium).

e. Représente graphiquement ces trois fonctions dans un repère. Tu prendras 1 cm pour 2 clips en abscisses, et 1 cm pour 5 € en ordonnées.

f. Détermine graphiquement le nombre de clips à partir duquel l'offre premium devient la plus économique.

81 Brahim décide d'aller régulièrement à la piscine pendant un an. Voici les tarifs proposés :

- **Tarif 1 :** 100 € par un an, entrées illimitées
- **Tarif 2 :** 40 € par an + 1 € l'entrée
- **Tarif 3 :** 2 € l'entrée

a. Si Brahim va nager une fois par mois, quel prix paiera-t-il avec chaque tarif ? Lequel sera le plus intéressant ?

b. On appelle x le nombre de fois où Brahim ira à la piscine. Exprime, en fonction de x, $t_1(x)$ le prix qu'il paiera avec le tarif 1 ; $t_2(x)$ le prix qu'il paiera avec le tarif 2 et $t_3(x)$ le prix qu'il paiera avec le tarif 3.

c. Représente graphiquement ces trois fonctions dans un même repère.

d. Combien d'entrées Brahim devra-t-il payer s'il va à la piscine une fois par semaine ? Et s'il y va deux fois par semaine ?

e. Par lecture graphique, détermine le tarif le plus intéressant pour Brahim dans ces deux cas.

f. À partir de combien d'entrées Brahim aura-t-il intérêt à choisir le tarif 1 ?

82 Sophie habite 

et son amie a déménagé à 

.

Elles décident de ne pas perdre le contact et de se voir régulièrement.
Sophie consulte alors les tarifs pour voyager en train entre les deux villes.

- **Tarif 1** : un aller-retour coute 40 € ;
- **Tarif 2** : 442 € d'abonnement annuel, puis chaque aller-retour à moitié prix.

Aide Sophie à choisir le tarif le plus avantageux en fonction du nombre de voyages prévus par an pour retrouver son amie.

83 Lors d'une activité sportive, il est recommandé de surveiller son rythme cardiaque. Soit f_m la fréquence cardiaque maximale recommandée (exprimée en battements par minutes). Pour l'évaluer, les médecins d'autrefois soustrayaient de 220 l'âge a de la personne, exprimé en années.

a. Traduis cette dernière phrase par une relation mathématique.

De récentes recherches ont montré que cette relation devait être légèrement modifiée. La nouvelle relation utilisée par les médecins est la suivante.

$$f_m = 208 - (0{,}75 \times a)$$

b. Calcule la fréquence cardiaque maximale à 60 ans, recommandée aujourd'hui par les médecins.

c. Détermine l'âge pour lequel la fréquence cardiaque maximale recommandée est de 184 battements par minute.

d. Sarah a 20 ans et court régulièrement. Au cours de ses entrainements, elle surveille son rythme cardiaque. Elle a ainsi déterminé sa fréquence cardiaque maximale recommandée : 193 battements par minute. Quand elle aura 40 ans, sa fréquence cardiaque maximale sera de 178 battements par minute.
Est-il vrai que, sur cette durée de vingt ans, sa fréquence cardiaque maximale recommandée aura diminué d'environ 8 % ?

84 Vrai ou Faux

P.1. f est la fonction affine définie par $f(x) = 3x - 4$. L'image de 2 par la fonction f est aussi le double de l'antécédent de 10 par f.

P.2. Si f est une fonction linéaire, alors pour tout nombre entier n : $f(n) = n \times f(1)$.

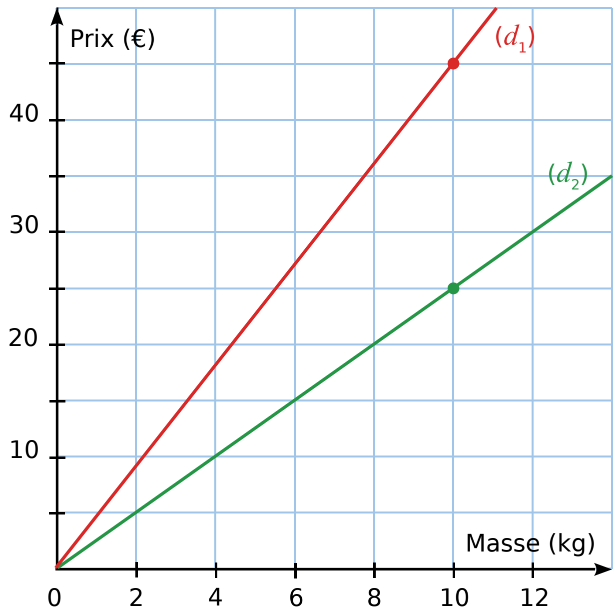
85 TICE Géométrie Dynamique

À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, reproduis la figure de l'exercice **46**, trace la représentation graphique de chaque fonction, puis vérifie les résultats obtenus.

86 ***Champignons***

Benjamin est cuisinier. Il voudrait acheter au marché des champignons de Paris, ainsi que des pleurotes. Il compte les utiliser dans des recettes différentes et sait que les pleurotes, plus recherchées et au gout plus fin, sont plus onéreuses que les champignons de Paris.

Le graphique suivant représente le prix de chaque sorte de champignon, en fonction de la masse achetée.



a. Sans aucun calcul, mais en justifiant, associe chaque représentation graphique au champignon qui lui correspond.

b. Quel est le prix d'un kg de champignons de Paris ? Explique ta démarche.

Benjamin décide d'acheter 5 kg de champignons de Paris et 4 kg de pleurotes.
Le maraicher lui fait une remise de 10 % sur les champignons de Paris et de 8 % sur les pleurotes.

c. Combien Benjamin va-t-il payer au total ?

Révision de tarif !

Un artisan fabrique et vend des bijoux fantaisie. Il débute dans le métier et, après quelques mois d'activité, il se rend compte que ses prix sont mal étudiés :

- les articles les plus chers ne se vendent pas (le plus cher est affiché à 150 €) ;
- la plupart de ses prix sont supérieurs à ceux pratiqués par ses concurrents.

En conséquence, il décide de revoir complètement sa grille tarifaire :

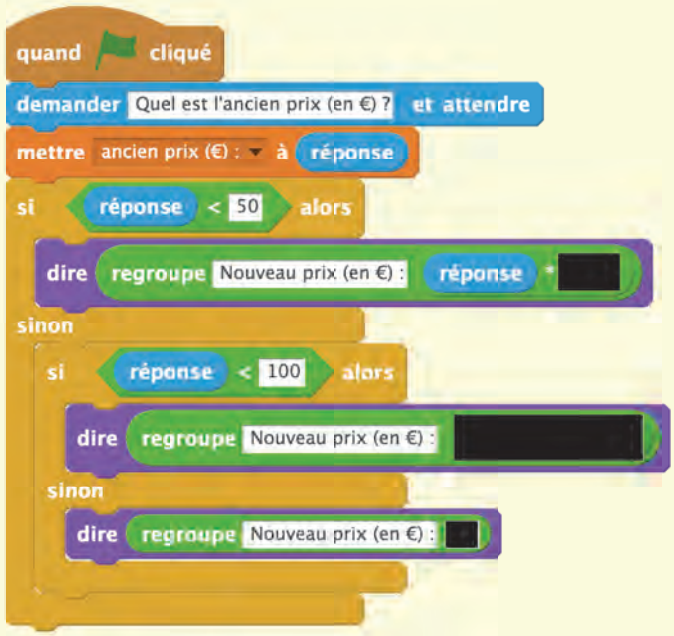
- les articles vendus à moins de 50 € baissent de 20 % ;
- ceux vendus entre 50 et 100 € bénéficient d'une réduction de 10 € ;
- tout article vendu à plus de 100 € voit son prix passer à 90 €.

a. Combien Violette paiera-t-elle pour un bijou qui valait 10 € auparavant ? Et s'il valait 80 € ? Et s'il valait 120 € ?

b. Un article coute désormais 50 €. Quel est son ancien prix ?

c. Le programme SCRATCH ci-contre, permet d'obtenir le nouveau prix après avoir saisi l'ancien prix.

- Saisis le programme sans oublier de compléter les zones noires.
- Vérifie alors tes réponses aux questions précédentes.



d. Recopie et complète le tableau suivant.

Ancien prix (€)	10	30	50		90	100	120	150
Nouveau prix (€)				50				

e. Dans un repère, représente graphiquement les nouveaux prix en fonction des anciens. (Tu prendras 1 cm pour 10 € sur chacun des deux axes.)

f. Soit f la fonction qui, à un ancien prix, associe le nouveau prix. L'expression de $f(x)$ dépend de la valeur de x. Recopie et complète cette expression.

$$f(x) = \begin{cases} \ldots \times x \text{ si } x < 50 \\ \ldots \text{ si } \ldots \\ \ldots \text{ si } \ldots \end{cases}$$

D3

Statistiques

Activités

1 Le bus, c'est la classe !

Cours : 1

À Mers-les-Bains, un chauffeur de bus effectue la navette entre le camping et la plage. Il a noté le nombre de passagers qu'il a transportés chaque jour du mois de juillet :

52	46	32	47	20	31	26	32	40	31	57
33	41	17	44	39	7	36	43	51	24	23
44	51	34	44	54	35	49	30	56		

a Combien de voyages a-t-il effectués avec un nombre de passagers compris entre 41 (inclus) et 50 (inclus) ?

b Pour présenter le résultat de son travail au patron du camping, il aimerait construire un tableau permettant de visualiser facilement la répartition globale. Comment peut-il s'organiser ?

c Propose deux représentations graphiques pour cette série statistique. Quels sont les avantages et les inconvénients de chaque représentation ?

2 Moyennement classe !

Cours : 2

Afin d'évaluer la fiabilité de sa chaine de production, un fabricant de ciment a noté la masse des sacs de ciment (en kg) qui ont été produits sur une période de 10 minutes.

25,1	24,7	24,7	24,7	25,4	25,2	25,2	25,3	25,3	25,1
24,6	25,1	24,6	24,9	25,3	24,9	25,2	25,1	25,0	24,9
25,2	25,0	25,3	25,1	24,8	24,7	25,2	24,7	24,7	25,1

a Utilise un tableur ou une calculatrice pour déterminer la moyenne de la série statistique ci-dessus.

b Afin de traiter plus rapidement cette série, le fabricant décide de regrouper les valeurs par classe dans le tableau suivant. Recopie et complète ce tableau.

Masse (en kg)	Entre 24,6 kg et 24,8 kg	Entre ... et ... kg	Entre 25,2 kg et 25,4 kg
Nombre de sacs			

c Quelques jours plus tard, le fabricant souhaite déterminer un ordre de grandeur de la masse moyenne des sacs de ciment pesés. Malheureusement, il a jeté le papier où il avait inscrit toutes les masses et ne dispose plus que du tableau.
Aide-le à résoudre sa question, et compare avec la réponse en **a**.

d Propose un regroupement avec seulement deux classes, et calcule à nouveau la moyenne obtenue à partir de cette représentation.

1 Classes et effectifs

→ 8

Définition Lorsque l'on étudie un **caractère quantitatif** sur une série brute de données, pour **limiter la taille du tableau de données**, on est parfois amené à **regrouper les données par classe** : on détermine alors les effectifs de chaque classe.

Exemple :
On a demandé à 28 élèves leur taille en centimètres. La série brute constituée des résultats de cette enquête est la suivante.

155	151	153	148	155	153	148	152	151	153	162	147	141	156
154	156	149	153	160	152	149	148	152	156	153	148	148	150

La population étudiée est constituée des élèves de la classe ; son effectif total est 28. Le caractère étudié, "leur taille", est quantitatif.

Les tailles allant de 141 cm à 162 cm, on décide de regrouper ces données par classe d'amplitude 5 cm.

Taille (en cm)	[140 ; 145[	[145 ; 150[	[150 ; 155[	[155 ; 160[	[160 ; 165[
Effectif	1	8	12	5	2

Remarques :
- Le choix de l'amplitude des classes est arbitraire, il dépend de la taille de la série et de la précision souhaitée : plus les amplitudes sont importantes, plus on perd d'information, et donc de précision...
- Les crochets précisent si les bornes sont comprises ou exclues.
  Par exemple, [140 ; 145[signifie : de 140 (inclus) à 145 (exclu).

2 Approximation de la moyenne

→ 12

Propriété Lorsque les données d'une série sont regroupées par classe, il n'est pas possible de déterminer sa moyenne. On peut toutefois en déterminer une approximation, en considérant le **centre des classes**.

Exemple :
On remplace les données de chaque classe par le centre de la classe. Par exemple, on remplace les 8 données de la classe [145 ; 150[par 147,5.

Taille (en cm)	[140 ; 145[	[145 ; 150[	[150 ; 155[	[155 ; 160[	[160 ; 165[
Centre	142,5	147,5	152,5	157,5	162,5
Effectif	1	8	12	5	2

Une approximation de la taille moyenne des élèves est donc :

$M = (1 \times 142{,}5 + 8 \times 147{,}5 + 12 \times 152{,}5 + 5 \times 157{,}5 + 2 \times 162{,}5) \div 28$

$M = 4\ 265 \div 28 \approx 152{,}3$ cm

Remarque :
On obtiendrait une approximation plus précise si on diminuait l'amplitude des classes.

Exercices

Voir aussi les Questions FLASH dans le manuel numérique !

À l'oral !

1 Voici une série statistique donnant, en mètres, la taille d'un groupe de personnes.

1,41	1,93	1,72	1,55	1,63	1,68
1,72	1,88	1,63	1,65	1,83	1,54
1,69	1,66	1,79	1,51	1,72	1,59

Pour chaque tableau ci-dessous, explique pourquoi il ne peut pas s'agir d'une répartition par classe de la série ci-dessus.

a.

Classe	[1,30 ; 1,50[	[1,60 ; 1,80[	[1,80 ; 2,00[
Effectif	1	5	9

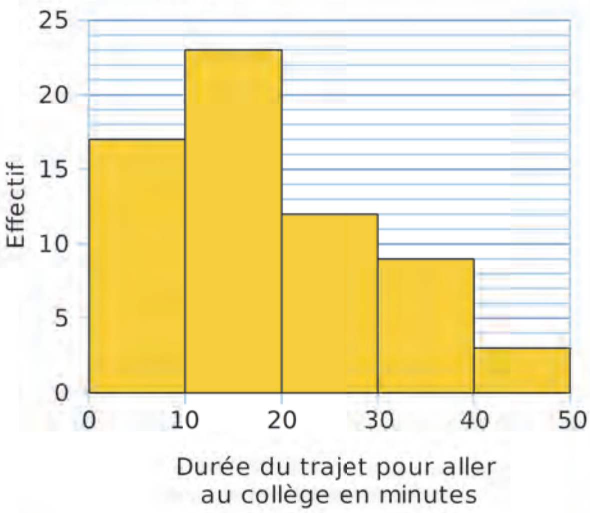
b.

Classe	[1,40 ; 1,70[	[1,60 ; 1,90[	[1,70 ; 2,00[
Effectif	11	12	7

c.

Classe	[1,40 ; 1,60[	[1,60 ; 1,80[	[1,80 ; 2,00[
Effectif	5	9	4

2 À partir de l'histogramme ci-dessous, donne le tableau d'effectifs par classe de la série statistique représentée.



3 Reprends l'exercice précédent.

a. Calcule l'effectif total de cette série.

b. Détermine une approximation de la moyenne de cette série.

c. Dans quelle classe se trouve la médiane de cette série ?

4 On considère la série statistique suivante.

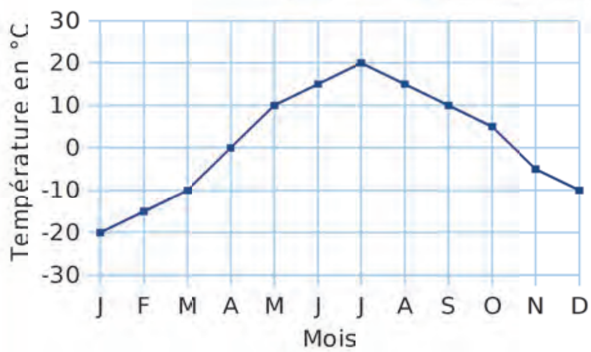
Âge	10	11	12	13	14
Effectif	7	3	9	11	4

a. Propose une situation concrète pouvant correspondre à cette série.

b. Calcule l'étendue, la moyenne et la médiane de cette série statistique.

5 Voici les températures (en °C) relevées à Perm, en Russie, pendant une année.

Calcule l'étendue, la moyenne et la médiane de cette série statistique.



6 Détermine une série de 5 nombres dont la moyenne est 10, dont l'étendue est 10 et dont la médiane est 10.

7 **Vrai ou Faux**

P.1. Dans la classe, 8 élèves ont eu moins de 10 au dernier DS, et 17 ont eu une note supérieure ou égale à 10. La moyenne de la classe est donc de (8 × 5 + 17 × 15) : 25 soit 11,8.

P.2. Un marchand de chaussures a trié son stock en fonction des pointures : de 30 à 33 ; de 34 à 37... Grâce à ces données, il peut connaitre le nombre de chaussures qu'il a en stock, pour chaque pointure.

Regroupements par classe

8 Un professeur d'EPS a organisé un concours de lancer de javelot. Voici les distances atteintes (en mètres) par ses 21 élèves de 3e.

9,1	6,5	9,8	13,6	11,9	14,5	8
11	13,1	13,7	8,7	6,1	11,9	10
9,1	8,3	8	12,1	13,7	9,4	8,1

a. Combien d'élèves ont lancé à 12 mètres ou plus ?

b. Combien d'élèves ont lancé à 8,9 mètres ou moins ?

c. Recopie et complète le tableau suivant.

Performance	de 6 m à 8,9 m	de 9 m à 11,9 m	de 12 m à 14,9 m
Nombre de lancers			

d. Combien d'élèves ont lancé à 9 mètres ou plus ?

9 Une sage-femme a relevé le poids des bébés qu'elle a aidés à mettre au monde, au cours de son dernier mois de garde (poids en kg).

2,89	3,09	4,17	2,31	2,57	3,44	4,13
3,11	4	2,6	2,92	3,97	3,46	2,75
4,27	2,5	3,97	4,14	2,27	3,5	

a. Recopie le tableau suivant et regroupe les données par classe.

Poids p du nourrisson (en kg)	$2 \leqslant p < 2{,}5$	$... \leqslant p < ...$	$... \leqslant p < ...$	$... \leqslant p < ...$	$... \leqslant p < ...$
Effectif					

b. Propose un autre regroupement avec seulement trois classes de même amplitude.

10 QCM

a. Quel est le centre de la classe [12 ; 20[?

R.1	R.2	R.3
8	16	12,5

b. Dans le tableau ci-contre, le pourcentage de notes comprises entre 5 et 9 est...

Note	Effectif
1 à 4	0
5 à 9	9
10 à 14	10
15 à 20	6

R.1	R.2	R.3
9 %	7 %	36 %

c. La moyenne de la série précédente vaut environ...

R.1	R.2	R.3
11,52	10	6,25

11 Un fabricant de reblochons pèse chaque fromage à la sortie de sa chaine de production. Voici ce qu'il obtient (en g) :

248	247	255	244	253	248	252
252	253	248	252	245	250	246
246	255	250	255	251	252	255
254	251	251	257	246	252	245
253	249	246	247	248	250	255
245	249	254	252	244	251	245
247	249	248	244	246	251	252
253	246	254	243	244	254	244
254	245	251	249	248	249	249

Les fromages sont répartis dans les points de vente, en fonction de leur poids :

- au marché : il vendra les reblochons pesant entre 243 g et 247 g (bornes incluses), avec un bénéfice de 1,50 € par fromage ;
- au supermarché : ceux pesant entre 248 g et 252 g (bornes incluses), avec un bénéfice de 0,90 € par fromage ;
- chez un fromager : les reblochons restants, avec un bénéfice de 1,20 € par fromage.

Quel bénéfice va-t-il réaliser par la vente de tous ses fromages ? Tu pourras regrouper les masses des fromages dans un tableau d'effectifs.

12 Le tableau suivant donne la répartition des notes des élèves de 3e3 au dernier DS de biologie. Détermine une approximation de la moyenne de la classe à ce DS.

Classe	[0 ; 4[	[4 ; 8[	[8 ; 12[	[12 ; 16[	[16 ; 20[
Effectif	3	5	9	7	4

13 Lors des vendanges, chaque tombereau est pesé à la cave coopérative avant d'être déversé dans les cuves à raisin.
Voilà ce qu'a relevé le caviste le premier jour (en kilogrammes) :

740	1 243	827	327	977	352
685	1 025	1 221	690	475	605
401	893	799	723	469	552
717	985	799	581	787	989
361	963	1 213	752	804	605
293	473	677	313	520	732
264	627	469	421	555	824
963	522	1 209	993	928	547

Organise ces données en quatre classes de même amplitude, puis représente cette série par un histogramme.

14 Les poubelles de la famille Tritout sont pesées chaque semaine pendant un an, afin de déterminer sa redevance annuelle d'enlèvement des ordures ménagères.
On obtient la répartition suivante.

Masse en kg	de 0 à 14	de 15 à 29	de 30 à 44	de 45 à 60
Effectif	6	17	22	7

a. Détermine une approximation de la moyenne de cette série.

b. Quelle est l'étendue de cette série ?

c. Détermine la classe médiane de cette série.

15 Voici le résultat d'une enquête réalisée auprès de 250 personnes pour connaitre le temps qu'elles passent devant la télévision chaque jour.

Temps en h	[0 ; 1[	[1 ; 2[	[2 ; 3[	[3 ; 4[	[4 ; 5[
Effectif	28	66	98	43	15
Fréquence en %					

a. Recopie et complète le tableau ci-dessus.

b. Combien de personnes interrogées regardent la télévision plus de 3 heures par jour ? Quel pourcentage cela représente-t-il ?

c. Combien de personnes regardent la télévision au moins 2 heures par jour ?

d. Construis l'histogramme des effectifs.

e. Calcule le temps moyen, en heures, que passent ces personnes devant la télévision. Tu arrondiras au dixième.

Séries statistiques

16 On considère le tableau d'effectifs suivant.

Temps (min)	10	20	30	60	90
Effectif	12	7	5	4	3

Calcule l'étendue, la moyenne et la médiane de cette série statistique.

17 Ce tableau fournit les températures mensuelles moyennes (en °C) relevées au cours d'une année, dans les villes Alpha (A) et Gamma (G).

	J	F	M	A	M	J	J	A	S	O	N	D
A	− 6	− 9	− 1	10	11	19	24	28	21	10	4	− 3
G	5	7	9	13	17	19	20	23	18	13	8	4

Pour chacune de ces deux villes...

a. calcule la moyenne des températures ;

b. détermine une médiane des températures ;

c. calcule l'étendue des températures.

18 Voici les relevés des précipitations annuelles (en mm) à Marrakech (M) et à Pointe-à-Pitre (P).

	J	F	M	A	M	J	J	A	S	O	N	D
M	19	19	26	24	5	2	0	2	6	14	17	18
P	44	30	34	39	64	55	58	95	86	118	112	70

Détermine la moyenne, l'étendue et une médiane de chaque série.

19 QCM

a. Quelle série statistique a pour étendue 7 et pour moyenne 4 ?

R.1	R.2	R.3
0 ; 7 ; 4 ; 4	4 ; 7 ; 1 ; 4	2 ; 2 ; 3 ; 9

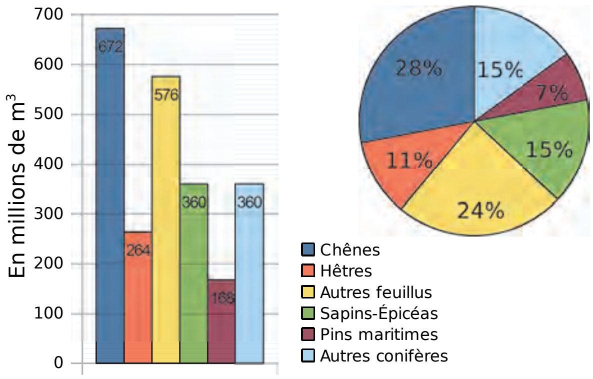
b. Pour la série statistique 7 ; 7 ; 7 ; 7 ; 7
7 est...

R.1	R.2	R.3
l'effectif total	la moyenne	l'étendue

c. Pour la série statistique 3 ; 9 ; 1 ; 15 ; 6 ...

R.1	R.2	R.3
la médiane est supérieure à la moyenne	la médiane est supérieure à l'étendue	l'étendue est supérieure à la moyenne

20 Voici deux graphiques représentant la répartition du volume sur pied de la forêt française (ONF).

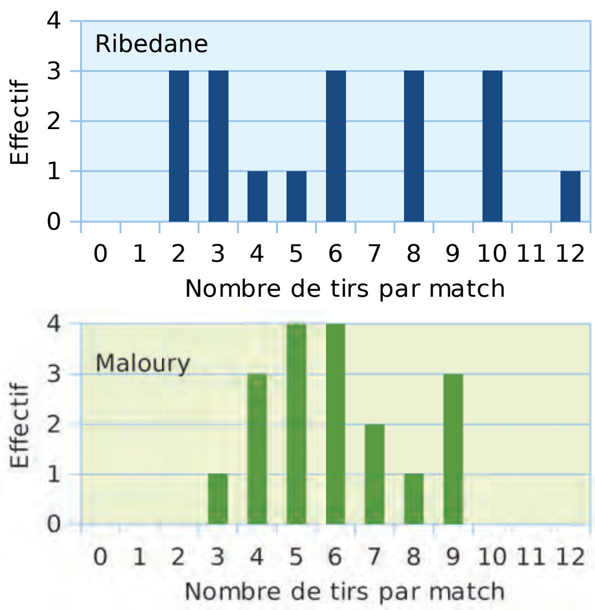


a. Détermine le volume sur pied total de la forêt française. Quel graphique as-tu utilisé pour répondre ?

b. Le volume sur pied des chênes représente-t-il plus ou moins du quart du volume total ? Quel graphique permet de répondre facilement ?

c. Leïla affirme qu'elle peut trouver le volume total en utilisant les données du diagramme circulaire et une valeur du diagramme en barres. Comment fait-elle ?

21 L'entraineur de l'équipe de football de Piédor compare le nombre de tirs effectués par Ribedane et Maloury, ses deux attaquants, pendant la première moitié du championnat.



a. Calcule le nombre moyen de tirs par match des deux attaquants. Que remarques-tu ?

b. Détermine le nombre médian de tirs pour chacune de ces deux séries. Que remarques-tu ?

c. Les deux joueurs te semblent-ils avoir le même profil ? Explique pourquoi.

22 **TICE Tableur**

La « longueur d'un mot » désigne le nombre de lettres qui le constituent. Par exemple, la longueur du mot « David » est 5.

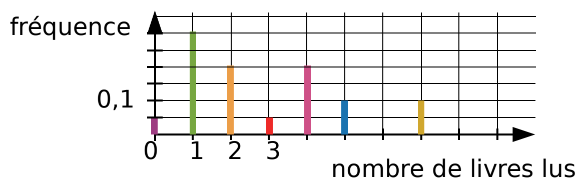
a. Saisis, dans une feuille de calcul, la liste des prénoms des élèves de la classe. Trie-les par ordre alphabétique.
La colonne B indique, à chaque fois, la longueur du prénom que tu as saisi dans la colonne A.
Trouve la fonction qui permet de faire ce calcul automatiquement, ou bien remplis toi-même cette colonne en comptant les lettres.

	A	B	
1	Prénom	Longueur du prénom	
2			

À l'aide du tableur, calcule la moyenne des longueurs des prénoms des élèves de la classe.

b. Quelles sont l'étendue et la médiane de cette série statistique ?

23 Une enquête a été réalisée dans une bibliothèque pour étudier le nombre de livres lus par les usagers, en décembre 2015. Le diagramme en bâtons ci-dessous donne la fréquence associée à chaque nombre de livres lus.



a. Détermine graphiquement le nombre médian de livres lus. Explique ta démarche.

b. Calcule le nombre moyen de livres lus par les usagers de cette bibliothèque en décembre 2015.

24 **Vrai ou Faux**

P.1. La médiane d'une série statistique est forcément une des valeurs de la série.

P.2. Dans un regroupement par classe, une valeur peut appartenir à deux classes différentes.

P.3. Dans une série statistique, la moitié des données ont une valeur inférieure à la moyenne.

Population !

On s'intéresse à la pyramide des âges de la population française.

Pour cela, on dispose des données fournies par l'Insee (Institut national de la statistique et des études économiques). Tu peux télécharger le fichier tableur qui regroupe ces données (pour l'année 2015) dans les compléments du manuel, ou construire toi-même le fichier correspondant.

	A	B	C	D	E	F
1	**Pyramide des âges au 1er janvier 2015, France**					
2	Mis à jour : janvier 2016					
3	Champ : France inclus Mayotte					
4	*Source : Insee, estimations de population (résultats provisoires à fin 2015)*					
5						
6	**Année de naissance**	**Âge révolu**	**Nombre d'hommes**	**Nombre de femmes**	**Ensemble**	
7	2014	0	401 382	384 347	785 729	
8	2013	1	403 797	384 661	788 458	
9	2012	2	409 038	389 099	798 137	

Pour les besoins de l'exercice, on considère que l'âge « 100 ans et plus » est équivalent à « 100 ans ».

a. Utilise le tableur pour calculer l'âge moyen et l'âge médian de la population française.

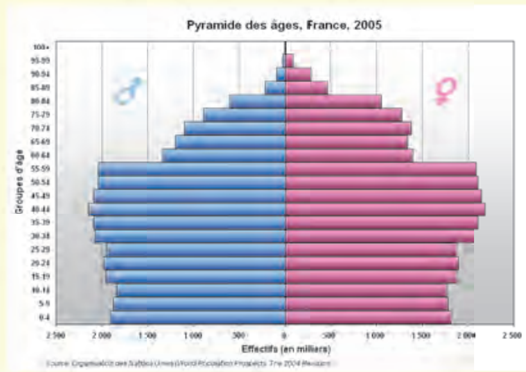
Premier découpage

b. Saisis dans la cellule F7 une formule permettant de calculer le nombre total d'habitants dont l'âge révolu est compris entre 0 et 9 ans inclus.

c. Dans la cellule F8, tu procéderas de la même façon pour les âges compris entre 10 et 19 ans inclus.

d. Et ainsi de suite, jusqu'à la dernière classe, les âges situés entre 90 et 100 ans inclus.

e. Détermine l'âge moyen de la population française en utilisant le centre des classes. Compare ton résultat avec celui trouvé en **a**.



Deuxième découpage

f. Dans la colonne G, on souhaite répartir la population française dans cinq classes. Propose un découpage et programme les cellules.

g. Détermine à nouveau l'âge moyen de la population en utilisant le centre de ces classes. Compare avec les deux premières valeurs trouvées.

Troisième découpage

h. L'INSEE propose le regroupement suivant en trois classes. Vérifie qu'il est correct, puis détermine à nouveau l'âge moyen à partir de ce regroupement.

Population totale par sexe et âge au 1er janvier 2016 (par tranche d'âges)

	Hommes	Femmes	Ensemble
Population totale	32 291 287	34 336 315	66 627 602
Moins de 20 ans	8 391 583	8 003 875	16 395 458
de 20 à 64 ans	18 550 750	19 161 177	37 711 927
65 ans ou plus	5 348 954	7 171 263	12 520 217

Champ : France y compris Mayotte.

Source : Insee, estimations de population (résultats provisoires arrêtés à fin 2015).

D4

Probabilités

Activités

1 Par le menu

Cours : 1

Chaque midi, une brasserie propose deux formules.

- La formule « **Sur le pouce** » :
  1 entrée et 1 plat **OU** 1 plat et 1 dessert.
- La formule « **La totale** » :
  1 entrée, 1 plat et 1 dessert.

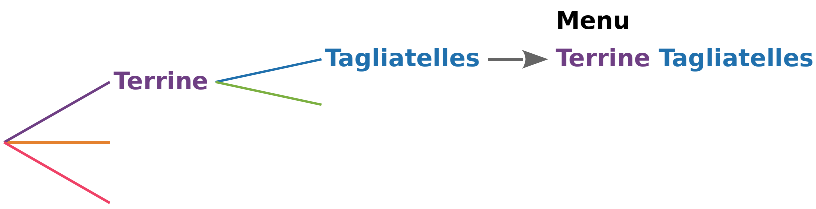
Les choix se font parmi les plats de la carte ci-contre.

Entrée :
Terrine
Crudités
Feuilleté au fromage

Plat :
Tagliatelles du pêcheur
Steak haché
(Bœuf Origine France)

Dessert :
Crème caramel
Tarte (fait maison)
Salade de fruits frais

a Pour connaitre toutes les possibilités de menu, en choisissant la formule « **Sur le pouce** (1 entrée + 1 plat) », reproduis et complète l'arbre ci-dessous.



b Représente, à l'aide d'un autre arbre, toutes les compositions possibles de menu, en choisissant la formule « **Sur le pouce** (1 plat et 1 dessert) ».

c Combien de menus différents peut-on choisir en prenant une formule « **Sur le pouce** » ?

d 15 personnes s'apprêtent à passer commande. Ils ont tous choisi la formule « **La totale** ». Est-il possible qu'elles choisissent toutes des menus différents ? Explique ton raisonnement.

2 Vu à la télé

Cours : 2

En finale d'un jeu télévisé, un candidat dispose d'un trousseau de trois clés :

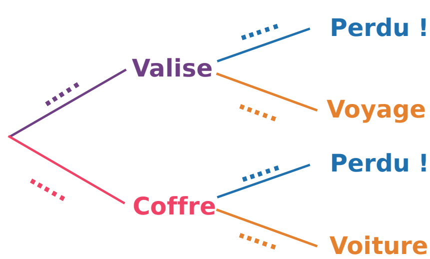
- la première permet d'ouvrir un coffre-fort (il gagnera alors une voiture),
- la seconde permet d'ouvrir une valise (il gagnera alors un voyage),
- la troisième n'ouvre rien du tout…

Dans une urne opaque, se trouvent une boule rouge et quatre boules blanches, indiscernables au toucher.

Le candidat doit piocher une boule :

- Si elle est rouge, il peut tenter d'ouvrir le coffre-fort, mais il n'a droit qu'à un essai.
- Si elle est blanche, il peut tenter d'ouvrir la valise ; là encore, il n'a droit qu'à un essai.

a Pour illustrer les issues de cette expérience aléatoire à deux épreuves, reproduis et complète l'arbre suivant, **pondéré** par les probabilités de chaque issue.



b Sur 600 candidats en finale, combien **environ** pourront tenter d'ouvrir le coffre-fort ?
Combien, parmi ceux-ci, gagneront la voiture ?
Quelle **fréquence** les 600 joueurs représentent-ils ?
Quelle est la **probabilité** qu'un candidat en finale gagne la voiture ?

c Quelle est la probabilité qu'un candidat en finale reparte les mains vides ? Justifie.

1 Notion de probabilité

A Issues, arbre de probabilité

Définition Lorsqu'on effectue une **expérience aléatoire**, on ne peut pas prévoir à l'avance quel va être son résultat, parmi les différentes **issues** possibles.

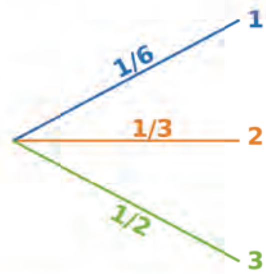
Un **arbre de probabilité** est un schéma permettant de visualiser les différentes issues d'une expérience aléatoire. Sur chaque branche menant à une issue, on indique la probabilité de cette issue. On dit que l'arbre est **pondéré** par les probabilités.

Exemple : Le dé de Katia

Katia lance un dé équilibré à six faces numérotées **1**, **2**, **2**, **3**, **3** et **3**. On observe le nombre indiqué sur la face supérieure : les issues sont **1**, **2** et **3**. Le dé est équilibré, donc chaque face a autant de chance de sortir qu'une autre.

- Ainsi, la probabilité de sortie du nombre **1** est de $\frac{1}{6}$, puisqu'une seule face du dé porte le numéro **1**.
- Deux faces portent le nombre **2**, donc la probabilité de l'issue **2** est $\frac{2}{6}$ soit $\frac{1}{3}$.
- De même, celle de l'issue **3** est $\frac{3}{6}$ soit $\frac{1}{2}$ soit encore 0,5 ou 50 %.

On résume ces résultats sur l'**arbre de probabilité** ci-contre.



Propriété Une probabilité est un nombre compris **entre 0 et 1**.
Elle peut être exprimée par un nombre en écriture fractionnaire, en écriture décimale, ou bien encore sous forme d'un pourcentage.

B Évènements

→ 8 13

Définitions

- Un évènement réalisé par aucune issue est appelé **évènement impossible**. Sa probabilité est 0.
- Un évènement réalisé par toute issue de l'expérience est appelé **évènement certain**. Sa probabilité est 1.
- L'**évènement contraire** d'un évènement A est l'évènement, noté $\overline{A}$, qui est réalisé lorsque A n'est pas réalisé.

Propriétés

- La probabilité d'un évènement est la somme des probabilités des issues qui le réalisent.
- La somme des probabilités d'un évènement et de son contraire vaut 1.

Exemple : Le dé de Katia

- L'évènement « *Obtenir un multiple de 5.* » est un évènement impossible.
- L'évènement « *Obtenir un nombre à un chiffre.* » est un évènement certain.
- L'évènement « *Obtenir un nombre impair.* » est réalisé par les issues **1** et **3**.

  Sa probabilité est donc $\frac{1}{6}+\frac{1}{2}=\frac{1}{6}+\frac{3}{6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$.

  On en déduit que la probabilité de l'évènement contraire : « *Obtenir un nombre pair.* » est $\frac{1}{3}$.

Définition Deux évènements sont dits **incompatibles** lorsqu'ils ne peuvent pas se réaliser simultanément.

Exemple : Le dé de Katia
L'évènement « *Obtenir un nombre pair.* » et l'évènement « *Obtenir le 3.* » sont incompatibles.

C Des fréquences aux probabilités

Lorsqu'aucune considération de régularité ou de symétrie ne permet de connaitre la probabilité d'une issue, on peut l'estimer en effectuant un grand nombre de fois une expérience aléatoire.

Propriété On considère une expérience aléatoire et un évènement A dont la probabilité est notée P(A).
Lorsqu'on répète un grand nombre de fois cette expérience aléatoire, la fréquence d'apparition de l'évènement A a tendance à se stabiliser autour du nombre P(A).

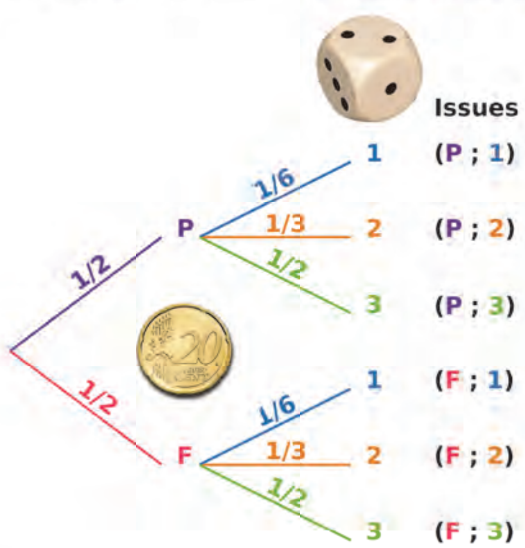
Exemple :
En lançant un grand nombre de fois un bouchon de la même façon, on pourrait ainsi estimer la probabilité qu'il retombe dans l'une ou l'autre des positions ci-contre.

2 Expérience à deux épreuves

→ 27

Propriété Sur un arbre de probabilité illustrant une expérience aléatoire à deux épreuves, la probabilité d'une issue est obtenue en **multipliant** les probabilités rencontrées sur les branches du chemin de l'arbre menant à cette issue.

Exemple :
On lance une pièce de monnaie équilibrée, puis ensuite on lance le dé de Katia.
On note **P** l'évènement « *La pièce tombe sur Pile.* », et **F** : « *La pièce tombe sur Face.* »



L'arbre de probabilité permet de visualiser les six issues de cette expérience aléatoire à deux épreuves.

La probabilité que la pièce tombe sur **Face**, puis que le dé tombe sur **1**, notée **(F ; 1)**, est donnée par le chemin de l'arbre représentant cette issue : elle est donc égale au produit $\frac{1}{2} \times \frac{1}{6}$, soit $\frac{1}{12}$.

Voir aussi les Questions FLASH dans le manuel numérique !

À l'oral !

1 On choisit au hasard une carte parmi les 4 As ci-dessous (cœur, trèfle, pique et carreau).

a. Quelle est la probabilité de choisir l'As de cœur ?

b. Énonce un évènement de probabilité $\frac{1}{2}$.

c. Énonce un évènement certain, puis un évènement impossible.

d. Énonce deux évènements incompatibles.

2 Magimax a truqué un dé numéroté de 1 à 6 : les faces 1, 2, 3, 4 et 5 apparaissent chacune avec une probabilité de 15 %.

Quelle est la probabilité que le dé tombe sur la face 6 ?

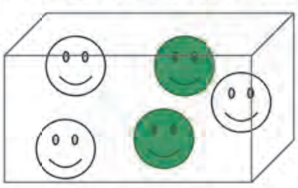
3 On lance la roue suivante et on observe sur quel secteur elle s'arrête.

a. Quelle est la probabilité que la roue s'arrête sur le secteur jaune ?

b. Complète la phrase : « *Il y a une chance sur ... pour que la roue s'arrête sur un secteur vert.* »

c. Pour chaque couleur, exprime la probabilité sous forme d'un pourcentage.

4 On pioche au hasard une boule dans la boite ci-dessous ; on la remet, on mélange, puis on pioche à nouveau une boule dans la boite.



a. Quelle est la probabilité que la première boule tirée soit verte ?

b. Quelle est la probabilité que les deux boules tirées soient vertes ?

5 Le tableau suivant donne la répartition des élèves d'une classe de 3^{e}, selon le sexe et le caractère droitier ou gaucher.

	Garçon	Fille
Gaucher	1	5
Droitier	9	10

On interroge au hasard un élève de cette classe.

a. Combien d'issues possède cette expérience aléatoire ?

b. Complète la phrase : « *Il y a une chance sur ... pour que l'élève interrogé soit une fille gauchère, soit ... % ».*

c. Quelle est la probabilité que l'élève interrogé soit gaucher ?

d. Déduis-en les chances d'interroger un élève droitier.

6 On a utilisé une calculatrice pour simuler quatre lancers d'un dé non truqué à six faces.

a. Quelle est la fréquence d'apparition...

- de la face 6 ?
- de la face 2 ?
- de la face 3 ?

b. Quelle est la probabilité d'apparition de la face 3 ?

7 **Vrai ou Faux**

P.1. Si on choisit au hasard une lettre parmi toutes celles de l'alphabet, alors la probabilité que ce soit une voyelle est d'un peu moins de 25 %.

P.2. Si on lance 1 000 fois une pièce de monnaie équilibrée, alors on obtient 500 fois « Pile » et 500 fois « Face ».

P.3. Si on lance deux fois de suite un dé non truqué à 6 faces, alors on a 2 chances sur 6 d'obtenir deux fois de suite le 5.

Notion de probabilité

8 On lance un dé bien équilibré à six faces numérotées :

2 4 6 8 10 12

a. Quelle est la probabilité que le dé tombe sur le 4 ?

b. Quelle est la probabilité que le dé tombe sur un nombre à deux chiffres ?

c. Y a-t-il plus de chances que le dé tombe sur un multiple de 3 ou sur un multiple de 4 ?

d. Que dire de l'évènement : « *Le dé tombe sur un nombre impair.* » ?

e. Énonce, dans le cadre de cette expérience aléatoire, un évènement certain.

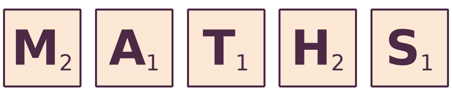
9 Dans un chapeau, on place dix papiers sur lesquels sont écrits les chiffres de 0 à 9. On tire un papier au hasard.

a. Quelle est la probabilité de tirer un chiffre inférieur à 5 ?

b. Que dire de l'évènement : « *Sur le papier tiré figure un nombre inférieur à 20.* » ?

c. Propose un évènement impossible dans le cadre de cette expérience aléatoire.

10 Dans un sachet opaque se trouvent les jetons suivants.



On les mélange et on pioche un jeton au hasard.

a. Quelle est la probabilité qu'un jeton avec la lettre S soit pioché ? Exprime cette probabilité sous forme d'une fraction, puis en écriture décimale, puis sous forme d'un pourcentage.

b. Quelle est la probabilité qu'un jeton valant 1 point soit pioché ?

c. Quelle est la probabilité qu'un jeton avec une voyelle soit pioché ? Déduis-en la probabilité de piocher un jeton sur lequel est inscrite une consonne.

d. Y a-t-il plus de chances que le jeton contienne une des lettres du mot PYTHAGORE ou qu'il contienne une des lettres du mot THALES ? Explique.

e. Que dire de ces deux évènements : « *Le jeton pioché vaut 2 points.* » et « *Sur le jeton pioché figure une voyelle.* » ?

11 Sur les faces d'un dé octaédrique sont écrites les lettres A, B, C, D, E, F, G et H. On lance ce dé et on observe la lettre figurant sur la face supérieure.

a. Combien d'issues possède cette expérience aléatoire ?

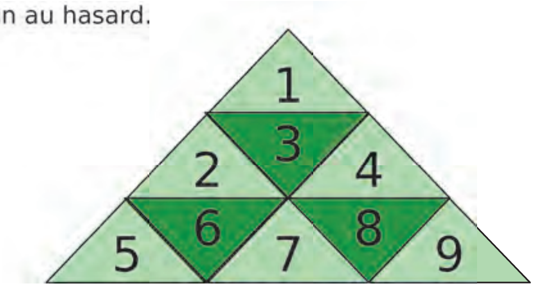
b. Énonce un événement, puis son contraire.

c. Que dire de l'évènement : « *Le dé tombe sur une face portant une des lettres du mot OVNI.* » ?

d. Énonce un évènement certain.

e. Énonce deux évènements incompatibles.

12 On découpe les neuf triangles de la figure suivante, on les place dans une boite et on en tire un au hasard.



a. Quelle est la probabilité de tomber sur un triangle vert foncé ? Sur un triangle vert clair ?

b. Quelle est la probabilité de tomber sur un triangle vert foncé portant un nombre pair ?

c. Les évènements « *Obtenir un triangle vert clair.* » et « *Obtenir un triangle portant un multiple de 3.* » sont-ils incompatibles ? Explique.

13 On tire une carte dans un jeu ordinaire de cinquante-deux cartes.

Donne les probabilités des évènements suivants.

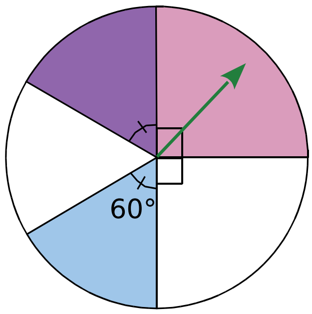
a. « *Obtenir un carreau.* »

b. « *Obtenir un valet.* »

c. « *Obtenir un valet de carreau.* »

d. On ajoute deux jokers à ce jeu. Les probabilités précédentes vont-elles augmenter ?

14 On lance la roue représentée ci-contre, et on regarde le secteur indiqué par la flèche lorsque la roue s'immobilise.



a. Les différents secteurs de cette roue sont-ils équiprobables ? Pourquoi ?

b. Recopie et complète les phrases suivantes.

- Il y a une chance sur … que la roue s'arrête sur le secteur rose, soit … %.
- Il y a une chance sur … que la roue s'arrête sur le secteur bleu, soit … %.

c. Quelle est la probabilité que la roue s'arrête sur un secteur blanc ? Propose deux méthodes.

15 Une urne opaque contient des boules indiscernables au toucher :

- cinq blanches, numérotées de 1 à 5 ;
- huit noires, numérotées de 1 à 8 ;
- et dix grises, numérotées de 1 à 10.

On tire une boule au hasard.

a. Combien d'issues possède cette expérience aléatoire ?

Détermine la probabilité de chacun des évènements suivants.

b. « *Tirer une boule blanche.* »

c. « *Tirer une boule qui porte le numéro 4.* »

d. « *Tirer une boule qui porte le numéro 9.* »

e. Énonce d'une autre manière l'évènement « *Tirer une boule ni blanche, ni grise.* », puis détermine sa probabilité.

16 Un dé bien équilibré a la forme d'un icosaèdre régulier : ses 20 faces sont numérotées de 1 à 20. Donne la probabilité de chacun des évènements suivants.

a. « *Obtenir un multiple de 2.* »

b. « *Obtenir un multiple de 3.* »

c. « *Obtenir un nombre impair.* »

d. « *N'obtenir ni un multiple de 2, ni un multiple de 3.* »

17 Décris une expérience aléatoire de ton choix, et énonce un évènement dont la probabilité vaut $\frac{3}{5}$.

18 Un bus transporte des élèves pour une compétition multi-sports. Parmi eux, il y a 10 joueurs de tennis de table, 12 coureurs de fond et 18 gymnastes. (Aucun d'entre eux ne pratique plusieurs sports.)

Au premier arrêt, on se demande quel sportif sortira en premier du bus.

a. Quelle est la probabilité que ce soit un joueur de tennis de table ?

b. Déduis-en la probabilité que ce soit un coureur ou un gymnaste.

c. Lors de cet arrêt, les élèves accueillent dans leur bus un groupe de nageurs. Sachant que, lors de la prochaine pause, la probabilité qu'un nageur sorte le premier est de $\frac{1}{5}$, détermine le nombre de nageurs présents dans le bus.

19 Le sac du jeu « Jet+ » contient des jetons, sur lesquels est inscrit un nombre entier. Le jeu consiste à piocher un jeton à tour de rôle et à additionner les nombres inscrits sur les jetons que chaque joueur a récoltés.

Djamel et Sarah ont commencé une partie. Voici les jetons qui restent dans le sac.

5 14 26 18 5 9 18 20

C'est le dernier tour de jeu pour Sarah...

a. Quelle est la probabilité qu'elle pioche un jeton 18 ?

b. Quelle est la probabilité qu'elle pioche un jeton multiple de 5 ?

Finalement, Sarah a tiré le 26, et décide de le garder. Son score est alors de 148 points.
On arrive ensuite au dernier tour de jeu de Djamel dont le score est de 135 points.

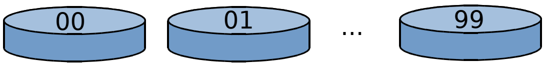
c. La probabilité qu'il tire un jeton multiple de 5 est-elle la même que celle trouvée à la question **b** ?

d. Quelle est la probabilité que Djamel remporte la partie ?

20 « *Tiens,* dit Ben à Charlotte, *pioche un bonbon au hasard dans ce paquet. Tu as 2 chances sur 5 d'en avoir un à la menthe.* »

« *Il y a donc 2 bonbons à la menthe dans le paquet !* » répond Charlotte. Qu'en penses-tu ?

21 Un sac contient cent jetons, indiscernables au toucher et numérotés de 00 à 99. On tire un jeton au hasard.



Quelle est la probabilité de tirer...

a. un jeton portant un numéro supérieur à 60 ?

b. un jeton contenant au moins un zéro ?

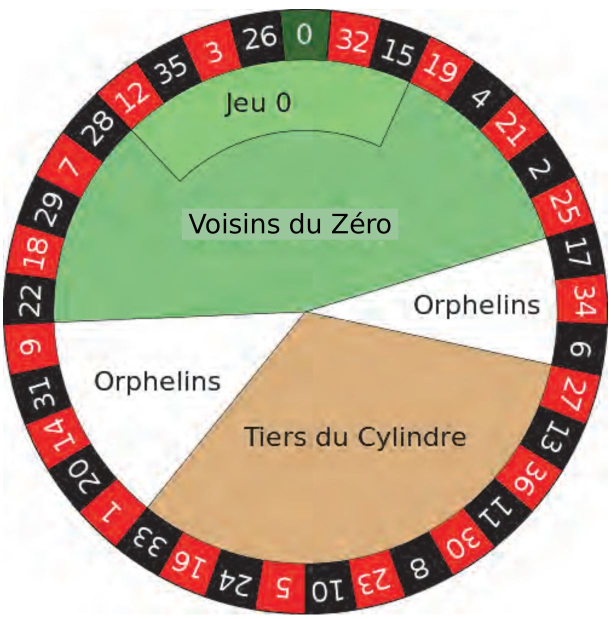
c. un jeton ne contenant pas de zéro ?

d. un jeton ne contenant que des 5 ou des 7 ?

e. un jeton portant un zéro ou un jeton ne contenant que des 5 ou des 7 ?

22 ***Faites vos jeux !***

Au casino, la roulette est une roue divisée en 37 secteurs identiques. Les secteurs sont alternativement de couleur rouge ou noire, sauf le secteur contenant le zéro, qui est vert.



Le croupier lance la roulette.

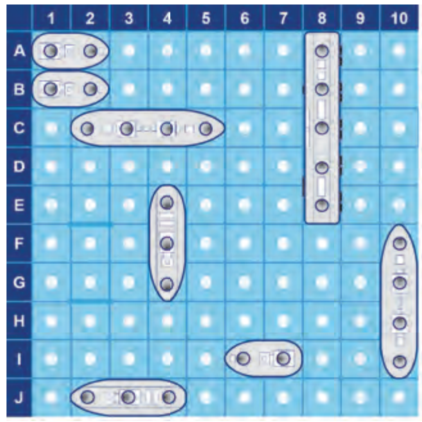
a. Quelle est la probabilité que la roulette s'arrête sur le zéro vert ?

b. Quelle est la probabilité que la roulette s'arrête sur un secteur rouge ? Sur un secteur noir ?

c. La probabilité que la roulette s'arrête sur un des secteurs de la zone « Tiers du cylindre » est-elle de $\frac{1}{3}$?

d. En 1913, au casino de Monte-Carlo, la roulette s'est arrêtée 26 fois de suite sur la couleur noire ! De nombreux joueurs furent ruinés : ils avaient misé sur le rouge, persuadés qu'il avait plus de chance de sortir. Que penses-tu de leur stratégie ?

23 Maéva et Louis jouent à la bataille navale. Maéva débute la partie et s'apprête à choisir une case au hasard. Elle espère toucher un des navires de Louis dont voici le plateau de jeu :



a. Quelle est la probabilité que Maéva touche l'un des navires de Paul lors de son premier coup ?

Maéva a finalement annoncé : « *E8 !* », et Louis a répondu :« *Touché !* ». Maéva doit donc rejouer.

b. Quelle est la probabilité qu'à sa deuxième annonce, Louis réponde : « *Coulé !* » ? Qu'il réponde : « *Touché !* » ? (On suppose que Maéva joue de façon stratégique !)

24 **QCM**

On prend une pièce au hasard dans un porte-monnaie dont voici le contenu.

a. La probabilité d'obtenir une pièce de 1 € est...

R.1	R.2	R.3
37,5 %	3	$\frac{1}{3}$

b. « *Obtenir un pièce contenant le chiffre 1.* » et « *Obtenir une pièce de 0,20 €.* » sont des évènements...

R.1	R.2	R.3
impossibles	contraires	opposés

c. « *Obtenir un pièce contenant le chiffre 2.* » et « *Obtenir une pièce de 1 €.* » sont des évènements...

R.1	R.2	R.3
impossibles	incompatibles	contraires

Expérience aléatoire à deux épreuves

25 ***Un peu de tenue !***

Tony doit choisir sa tenue de sport pour aller à l'entrainement. Dans son armoire, il trouve 4 maillots et 3 shorts.

Combien de tenues différentes peut-il mettre ?

26 ***Les prénoms***

Betty est très contente, elle va bientôt avoir deux petites sœurs jumelles ! Le choix des prénoms n'est pas encore arrêté, mais ses parents ont décidé qu'ils feraient partie de la liste suivante :

Emma – Sidonie – Lola – Jeanne – Lilou.

Betty se demande alors combien il existe de possibilités pour les prénoms de ses futures sœurs. Peux-tu l'aider ?

27 ***Digicode***

Un digicode commande l'ouverture de la porte du garage à vélo du collège. Le code d'ouverture est composé d'une lettre parmi **A**, **B** ou **C**, suivie d'un chiffre parmi **1**, **2** ou **3**.

a. Quels sont les différents codes possibles ?

Alice compose au hasard le code **A1**.

b. Quelle est la probabilité que ce code ouvre la porte du garage à vélo ?

c. On informe Alice qu'en tapant **A1**, elle s'est trompée à la fois de lettre et de chiffre. Quelle est la probabilité qu'Alice trouve le bon code lors du deuxième essai ?

d. Son deuxième essai n'a toujours pas ouvert la porte, mais cette fois Alice ne s'est trompée que de lettre. Explique pourquoi, à présent, elle est sûre de trouver le bon code lors d'une troisième tentative.

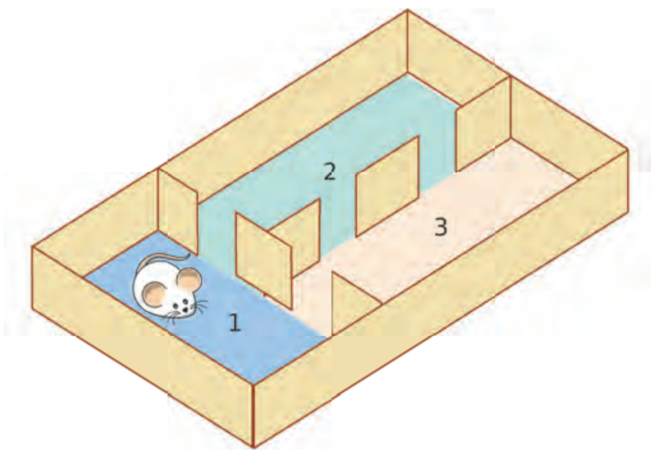
28 On s'amuse à créer des nombres à deux chiffres en les choisissant parmi les chiffres 1, 5 et 6. Ces chiffres peuvent se répéter.

a. Combien de tels nombres peut-on fabriquer ? Tu pourras t'aider d'un arbre des possibles.

b. On choisit au hasard l'un de ces nombres. Quelle est la probabilité que le nombre choisi...

- soit impair ?
- soit un multiple de 3 ?
- soit un nombre ayant deux chiffres identiques ?
- soit un nombre premier ?

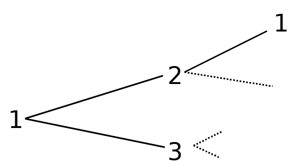
29 Une souris est enfermée dans un labyrinthe. On suppose qu'elle se trouve dans la pièce 1 (voir le dessin ci-dessous). À chaque sonnerie, elle franchit une porte, au hasard.



a. Quelle est la probabilité que la souris se trouve dans la pièce 2 après une sonnerie ?

b. Quelle est la probabilité que la souris se trouve dans la pièce 1 après deux sonneries ?

Tu pourras t'aider en recopiant et en complétant l'arbre de probabilité suivant.



30 **QCM**

a. Sur une pizza, on peut choisir deux ingrédients parmi : double fromage – poivrons – œuf – poulet – chorizo.

Combien de pizzas différentes peut-on composer ?

R.1	R.2	R.3
32	25	10

b. On lance un dé cubique deux fois de suite. Le nombre d'issues de cette expérience aléatoire est...

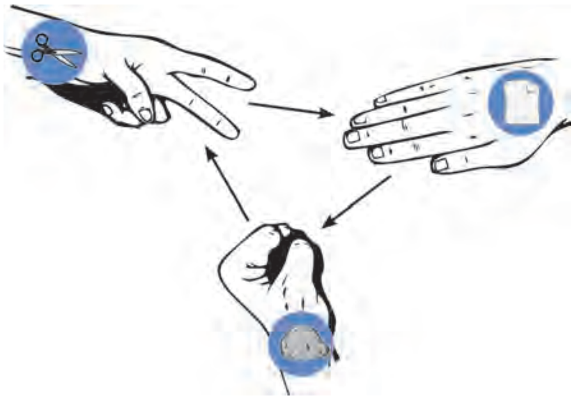
R.1	R.2	R.3
36	2	12

c. On lance une pièce de monnaie, puis un dé classique à 6 faces, tous deux bien équilibrés. La probabilité d'obtenir l'issue (Face – 4) est...

R.1	R.2	R.3
$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{12}$

31 Dans le jeu « *Pierre – Feuille – Ciseaux* », deux joueurs choisissent en même temps l'un des trois « coups » suivants :

- **Pierre**, en fermant la main ;
- **Feuille**, en tendant la main ;
- **Ciseaux**, en écartant deux doigts.



Les règles du jeu précisent que :

- la pierre est plus forte que les ciseaux (elle les casse) ;
- les ciseaux sont plus forts que la feuille (ils la coupent) ;
- la feuille est plus forte que la pierre (elle l'enveloppe) ;
- il y a égalité lorsque les deux joueurs choisissent le même coup.

a. Tu joues « *Pierre* » face à Léo qui joue au hasard. Quelle est la probabilité que tu perdes ?

b. Quelle est la probabilité que tu ne perdes pas ?

c. Tu décides de jouer « *Pierre* » lors des deux parties suivantes. Léo joue toujours au hasard. Construis l'arbre des possibilités de Léo pour ces deux parties. (Tu noteras **P**, **F**, **C** pour Pierre, Feuille, Ciseaux.)

d. Utilise l'arbre pour déterminer la probabilité :

- que tu gagnes les deux parties ;
- que tu ne perdes aucune des deux parties.

32 Un ballotin contient 10 bouchées au chocolat blanc et 25 au chocolat noir. Combien de chocolats doit-on prendre pour être certain d'en avoir au moins 5 noirs ?

33 ***Avec remise...***

Zoé tire une carte au hasard dans un jeu classique de 32 cartes, bien mélangé. Après l'avoir regardée, elle la replace dans le paquet et mélange à nouveau. Elle pioche à nouveau une carte au hasard.

a. Combien d'issues possède cette expérience aléatoire ?

b. Quelle est la probabilité que la première carte tirée soit la Dame de cœur ?

c. Sachant que la première carte tirée est le 10 de trèfle, quelle est la probabilité que la seconde carte tirée soit le 10 de trèfle ?

d. Quelle est la probabilité de tirer deux cartes du même atout (c'est-à-dire deux piques, ou deux cœurs, ou deux carreaux, ou deux trèfles) ? Tu pourras t'aider d'un arbre de probabilité.

34 ***...puis sans remise***

On reprend l'expérience aléatoire de l'exercice **33**, mais cette fois sans remise, c'est-à-dire que l'on garde la première carte tirée sans la remettre dans le paquet.

Les réponses aux questions seront-elles les mêmes ? Explique tes raisonnements.

35 Lors d'un biathlon, les concurrents doivent effectuer un parcours de 10 km à ski de fond, puis deux tirs à la carabine.
Éric est un pratiquant régulier. Ses statistiques sur la saison l'amènent à penser que ses chances de réaliser la course de ski en moins de 45 minutes sont de 80 %. Par ailleurs, il pense réussir un tir à la carabine neuf fois sur dix en moyenne.

a. Représente, à l'aide d'un arbre de probabilité, les différentes possibilités : temps de course (plus ou moins 45 minutes), tirs réussis ou manqués.

b. Au prochain biathlon, combien de chances Éric a-t-il de terminer la course en moins de 45 minutes, tout en réussissant ses deux tirs ?

36 *Groupes sanguins*

Le sang humain est classé en quatre groupes distincts : A, B, AB et O.
Indépendamment du groupe, le sang possède un facteur Rhésus. Il peut être positif (Rh+) ou négatif (Rh−).
Voici la répartition des groupes sanguins dans la population française :

A	B	AB	O
45 %	9 %	3 %	43 %

Pour chaque groupe, la répartition des Français possédant un facteur Rhésus positif ou négatif est la suivante.

Groupe	A	B	AB	O
Rh+	87 %	78 %	67 %	86 %
Rh−	13 %	22 %	33 %	14 %

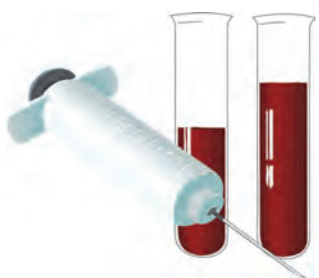
Un individu de groupe O et de Rhésus négatif est appelé « donneur universel » car il peut donner de son sang aux personnes de tous les groupes sanguins.

Quelle est la probabilité qu'un Français pris au hasard...

a. ait un sang du groupe O ?

b. soit un « donneur universel » ?

c. ait un sang de Rhésus négatif ?



37 Vrai ou Faux

P.1. On tire une boule au hasard dans une urne qui contient des boules rouges et des boules vertes. S'il y a trois fois moins de boules rouges que de boules vertes, alors la probabilité de tirer une boule rouge est $\frac{1}{3}$.

P.2. Si on a obtenu quatre fois « Pile » lors des quatre premiers lancers d'une pièce de monnaie équilibrée, alors on a plus de chances d'obtenir « Face » que « Pile » au lancer suivant.

P.3. On tire deux cartes dans un jeu classique de 32 cartes. La probabilité d'obtenir deux As est $\frac{4}{32} \times \frac{4}{32}$, soit $\frac{1}{64}$.

38 TICE Tableur

On souhaite simuler 1 000 fois l'expérience aléatoire consistant à lancer simultanément deux dés équilibrés, à six faces numérotées de 1 à 6.

a. Reproduis cette feuille de calcul dans un tableur.

	A	B	C	D	E	F
1	Dé n°1	Dé n°2	Somme			
2						

b. Utilise la fonction ALEA.ENTRE.BORNES pour simuler le lancer d'un dé dans la cellule A2. Recopie cette formule vers le bas jusqu'à la cellule A1001. Complète de même la colonne B.

c. Quelle formule peux-tu saisir en C2, puis recopier ensuite vers le bas ? Complète alors la colonne C.

d. La répartition des différentes sommes obtenues dans la colonne C te semble-t-elle équilibrée ? Pourquoi certaines apparaissent-elles plus rarement ?

e. Dans la colonne D, précise toutes les sommes qu'il est possible d'obtenir en lançant deux dés.

	...	C	D	E	F
1	...	Somme	Issues	Effectifs observés	Fréquences (%)
2					

f. Remplis la colonne E. Pour cela, utilise la fonction NB.SI pour compter le nombre de fois où chacune des issues apparait dans la colonne C.

g. Quelle formule peux-tu saisir en F2, puis recopier vers le bas ? Remplis la colonne F.

h. Représente graphiquement la répartition des différentes sommes obtenues par un diagramme en bâtons.

i. Appuie simultanément sur les touches du clavier MAJ + CTRL + F9 (ou sur F9 selon le tableur utilisé), pour simuler 1 000 nouveaux lancers. Commente ce que tu observes.

j. À l'aide d'un arbre ou d'un tableau, détermine sur ton cahier les probabilités de chaque issue lors du lancer de deux dés.

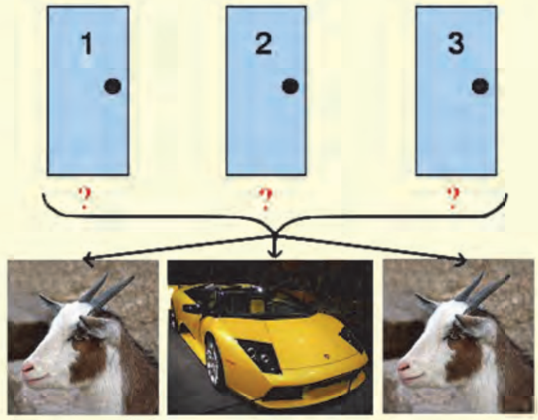
k. Les résultats trouvés à la question précédente sont-ils identiques au contenu de la colonne F ? Explique ta réponse.

Camper sur ses positions ?

Dans un célèbre jeu télévisé américain « *Let's make a deal !* », un candidat se trouve face à trois portes. Derrière l'une d'elles se trouve une voiture ; les deux autres masquent... une chèvre !

Le candidat emporte ce qui se trouve derrière la porte qu'il aura choisie, mais son choix se fait en plusieurs étapes :

- **Étape A :** Le candidat choisit la porte 1, 2 ou 3.
- **Étape B :** Le présentateur ouvre une porte perdante parmi les deux portes qui n'ont pas été choisies. (Le présentateur connait bien sûr la porte gagnante.)
- **Étape C :** Le candidat décide alors de maintenir sa décision initiale ou de choisir une autre porte.



Le candidat a-t-il plus, moins ou autant de chances de gagner la voiture en modifiant sa décision plutôt qu'en conservant son choix initial ?

a. Explique comment opère le présentateur pour ouvrir une porte perdante à l'**étape B**.

b. Si tu étais à la place du candidat, changerais-tu d'avis lors de l'**étape C** ?

Tu vas simuler une partie à l'aide d'un tableur.

c. Reproduis la feuille de calcul suivante.

	A	B	C	D	E	F
1	Porte gagnante	Porte choisie au départ	Gagné en maintenant son choix	Gagné en changeant d'avis		
2						

d. Dans la cellule A1, entre la formule =ALEA.ENTRE.BORNES(1;3) . Explique cette formule.

e. Quelle formule saisir en B2 ?

f. On aimerait que la cellule C2 contienne « 1 » si le candidat n'a pas changé d'avis et a gagné la voiture, et « 0 » si le candidat n'a pas changé d'avis et n'a pas gagné la voiture.
Recopie et complète : « *Si les cellules ..., alors C2 doit contenir 1, sinon, elle doit contenir 0.* »
Saisis alors une formule convenable en C2, en utilisant la fonction *Si* du tableur. (Aide-toi de l'assistant de fonctions.)

g. On aimerait que la cellule D2 contienne « 1 » si le candidat a changé d'avis et a gagné la voiture, et « 0 » si le candidat a changé d'avis et n'a pas gagné la voiture.
Si C2 contient un 0, que doit contenir D2 ? Si C2 contient un 1, que doit contenir D2 ?

h. Programme alors convenablement la cellule D2.

i. Recopie vers le bas les cellules A2 à D2 pour simuler 100 parties de ce jeu.

j. Sur les 100 parties, on aimerait savoir combien de fois le candidat a eu raison de maintenir son choix de départ. Quelle formule peux-tu saisir en E2 pour répondre à cette question ?
De même, saisis en F2 une formule donnant le nombre de fois où le candidat a bien fait de changer d'avis.

k. Et toi, maintiens-tu ta réponse à la question **b** ?
Quelle semble être la probabilité de gagner si on maintient son choix ? Si on change d'avis ?

l. Que peux-tu dire des évènements : « *Le candidat ne change pas d'avis et gagne la voiture.* » et « *Le candidat change d'avis et gagne la voiture.* » ?
Quelle est, au départ, la probabilité de gagner la voiture ? Explique alors les réponses à la question précédente.

A1

Algorithmique et programmation

Exercices

Voir aussi les Questions FLASH dans le manuel numérique !

À l'oral !

1 Le numéro ISBN à 10 chiffres est un numéro qui permet l'identification d'un livre dans une édition donnée. Il doit donc figurer sur tous les exemplaires d'une même œuvre d'une même édition. Le dernier chiffre du numéro ISBN est une clé de contrôle.
Voici l'algorithme donnant la clé, à partir de l'exemple ci-contre. On calcule :
$(8\times10)+(1\times9)+(7\times8)+(5\times7)+(2\times6)+(5\times5)+(7\times4)+(6\times3)+(6\times2) = N$

- Si le reste de la division de N par 11 est égal 0, alors la clé de contrôle est égale à 0.
- Sinon on soustrait ce reste à 11 pour obtenir la clé de contrôle.

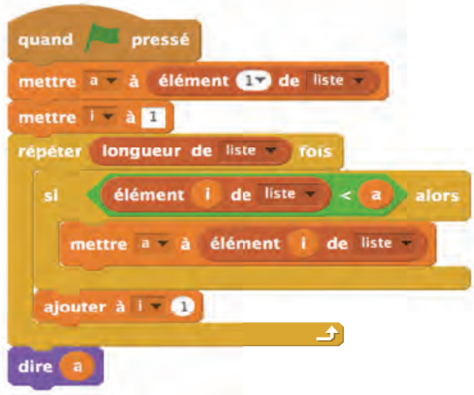
a. Vérifie que la clé de contrôle est correcte pour le numéro ISBN donné en exemple.

b. Les numéros ISBN suivant sont-ils corrects ?
- 2-70-112289-9
- 3-09-112017-6

2 On dispose de deux récipients pouvant respectivement contenir 5 et 3 litres, ainsi que d'un robinet distribuant de l'eau à volonté. On a également la possibilité de vider les récipients. Comment faire en sorte que l'un des deux récipients contienne exactement 4 litres ?

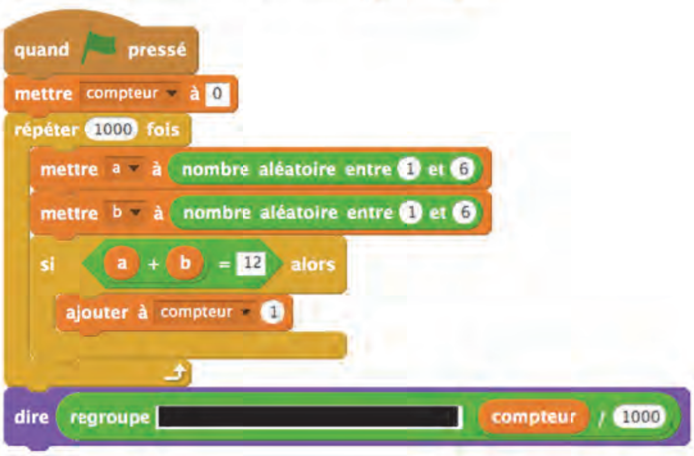
3 Voici un programme SCRATCH.
- **liste** est une liste de nombres entiers ;
- **a** et **i** sont des variables.

Que fait au juste ce programme ?
Qu'annonce le lutin à la fin ?



4 Une motion est soumise au vote de 5 personnes.
La réponse OUI est notée 1 et la réponse NON est notée 0.
Si une personne (ou plus) répond NON, alors la motion est rejetée.
À l'aide d'un seul **Si**, comment tester si la motion est rejetée ?

5 Qu'annonce le chat à la fin de ce programme SCRATCH ?

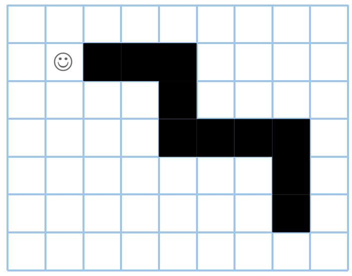


1 Robot et logo

Sur un quadrillage, un robot est représenté par un smiley (☺).
Quand il se déplace, il noircit les cases sur son passage. Il peut se déplacer vers le haut (**H**), vers le bas (**B**), vers la droite (**D**) et vers la gauche (**G**).

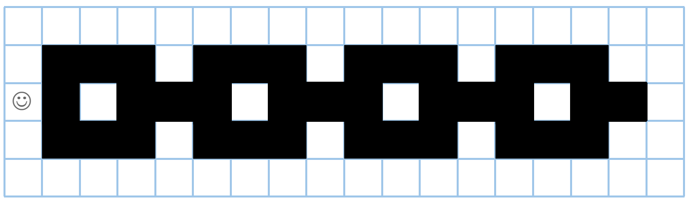
Il peut aussi répéter une série d'instructions sous la forme **Rk(instructions)**, c'est-à-dire :
Répéter **k** fois les **instructions** citées entre parenthèses.

Exemple : le programme R2(DDDBB) donne la figure ci-contre.



a Dessine la figure obtenue avec le programme : R3(DDDBBBR3(DH)).

b Écris un algorithme donnant la figure ci-dessous.

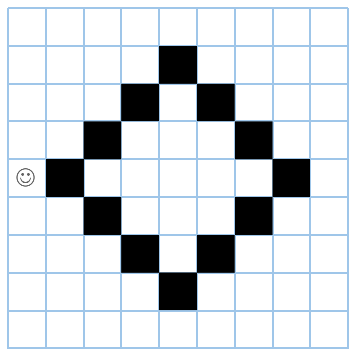


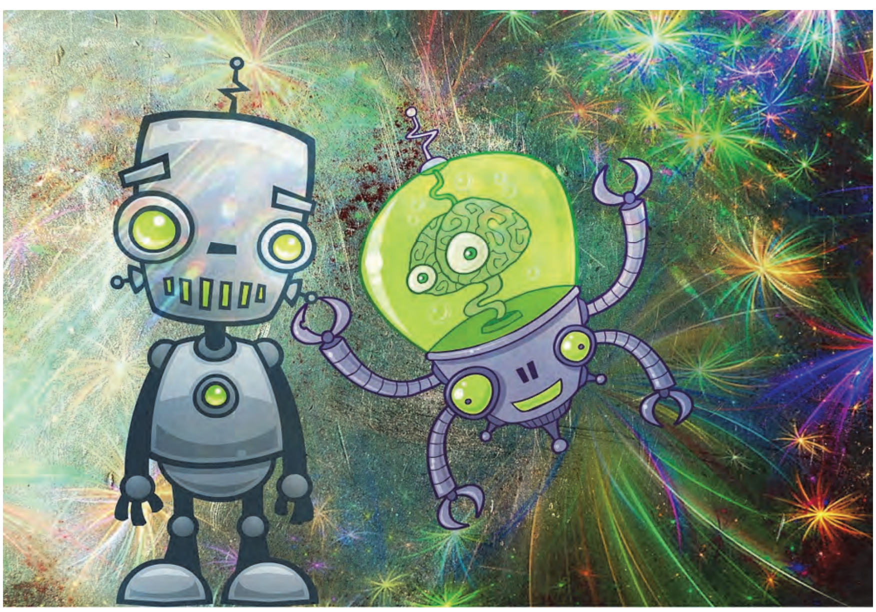
c Le robot dispose maintenant de deux instructions supplémentaires :
- **C** pour baisser le crayon ;
- **L** pour lever le crayon.

Quand le crayon est baissé, les déplacements qui suivent l'instruction **C** noircissent les cases.

Trouve un programme donnant la figure ci-contre.
Attention : au lancement du programme, le crayon est levé.

Ce programme peut-il ne contenir que 21 instructions ?



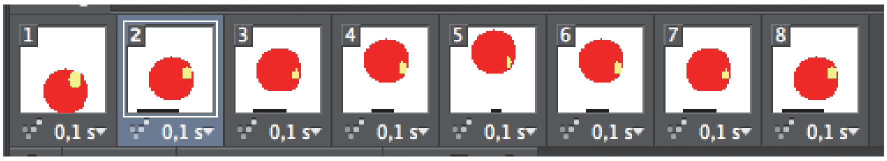


2 Format GIF, compression de données

Le format **GIF** (**G**raphic **I**nterchange **F**ormat) est un format de fichier graphique créé à la fin des années 80. Il utilise une palette de couleurs qui peut atteindre 256 couleurs différentes (codées sur 1 octet).

Partie 1

Pour créer un GIF animé (petite image animée que l'on trouve parfois sur une page Web), on crée un fichier contenant 8 images. Chaque image est composée de points. Chaque point est codé par l'une des 256 couleurs et utilise 1 octet. La valeur de l'octet indique donc la couleur du point correspondant.

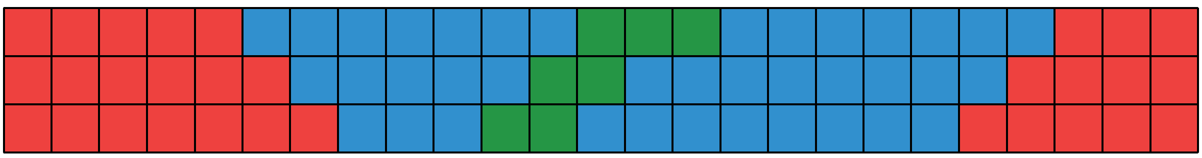


a Si chacune des huit images contient 2 500 points, quelle est la taille approximative du fichier contenant ces images, en Ko (KiloOctets) ?

b Sur le disque dur, on constate que la taille de ce fichier GIF n'est que de 4 Ko. En effet, il est automatiquement compressé avant d'être archivé. À l'ouverture, le fichier est décompressé. Quel est le facteur de compression de ce fichier ?

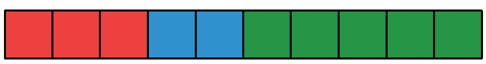
Partie 2

c Soit une image, fortement agrandie, d'un fichier GIF telle que ci-dessous. Chaque carré est un point (un pixel) et est presque invisible à l'œil nu.



Pour simplifier, on supposera que le fichier GIF ne contient que cette image.
Supposons aussi que la couleur rouge est codée avec l'octet **R**, la couleur bleue avec l'octet **B** et la couleur verte avec l'octet **V**. La première ligne de l'image est donc codée ainsi : RRRRRB...V...
Code entièrement cette image.

d Pour compresser ton codage, tu peux utiliser quelques octets particuliers :
- un octet **X** indiquant une répétition,
- les octets **1**, **2**, **3**, **4**, **5**, **6**, **7**, **8**, **9** indiquant le nombre de fois qu'une couleur est répétée.

Ainsi, X3RX2BX5V code la ligne : 

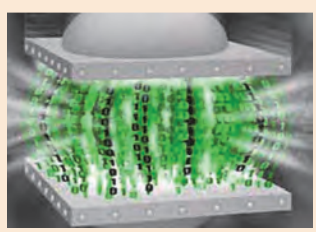
- À l'aide de ce nouveau système de codage, code à nouveau l'image étudiée dans **a**.
- Quelle est la taille du fichier obtenu, en octets ?
- Quel est le facteur de compression ? Compare avec celui obtenu à la question **b**.

e Avec cette technique de codage, pour quel type d'images le facteur de compression est-il important ?

Point info

Le **RLE** (**R**un **L**ength **E**ncoding) est un algorithme de compression de données, qui s'apparente à la technique utilisée dans la partie 2. Il est particulièrement efficace pour les grandes séries d'octets identiques consécutifs, par exemple pour le codage et la compression d'images en noir et blanc.

Pour les autres types de données, il existe des techniques de compression beaucoup plus évoluées.



3 Tri à bulle , tri rapide

On considère une liste d'entiers : 4 7 2 10 5 3 8 que l'on souhaite ranger dans l'ordre croissant. Voici deux algorithmes permettant de le faire.

Partie 1 : Tri à bulle

Étape 1 : On compare les deux premiers entiers de la liste. S'ils ne sont pas dans l'ordre, alors on les échange.

Étape 2 : On compare ensuite le deuxième et le troisième entier de la nouvelle liste. S'ils ne sont pas dans l'ordre, alors on les échange.

Étape 3 : On continue jusqu'à ce que l'on compare les deux derniers entiers de la liste.

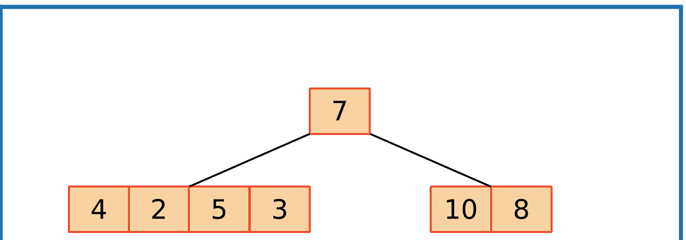
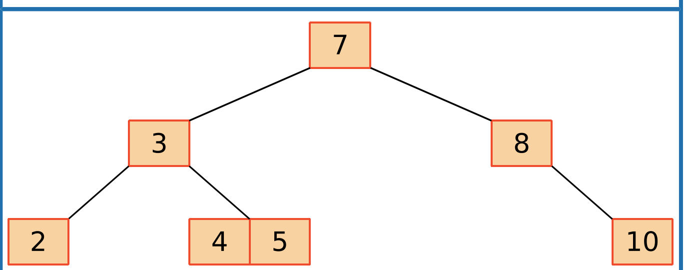
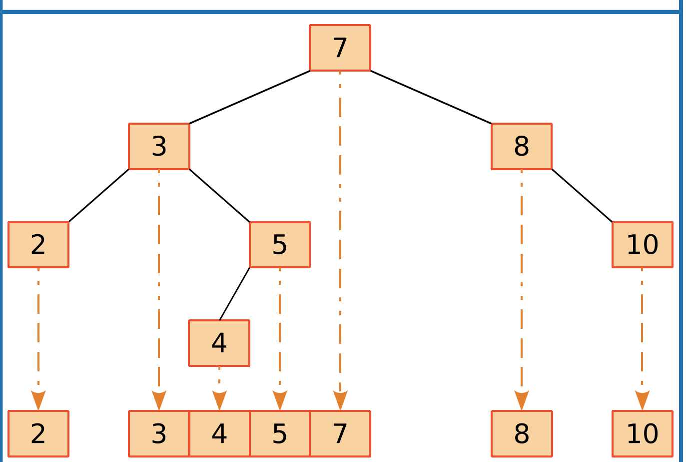
À ce stade, le plus grand entier est forcément à la fin de la liste.

Étape 4 : On recommence à l'**étape 1** avec la liste des entiers privés du dernier élément, puisque c'est le plus grand.

a Applique les trois premières étapes. Pourquoi est-il précisé à la fin de l'étape 3 que « le plus grand entier est forcément à la fin de la liste » ?

b Applique cet algorithme en entier, en écrivant à chaque fois la liste intermédiaire obtenue.

Partie 2 : Tri rapide

On commence par choisir dans la liste un nombre **au hasard**, par exemple : 7. On le place au centre. À sa gauche, on place les nombres plus petits et, à sa droite, les nombres plus grands. On représente ce tri à l'aide de l'arbre ci-contre.	
On obtient deux sous-listes. On procède de la même manière avec chacune d'elles, en choisissant au hasard : 3 pour la liste de gauche, et 8 pour celle de droite.	
On recommence ainsi avec la dernière liste. Il suffit alors de lire l'arbre verticalement et de gauche à droite pour obtenir la liste triée.	

c Applique cet algorithme à la liste : 8 5 4 1 3 7 2 9 6

Point info

- Dans le cas du **tri à bulle** (comme pour le **tri par insertion** ou le **tri par sélection**), si n est le nombre d'éléments de la liste, alors le nombre moyen d'opérations pour trier la liste est égal à n^2. Pour une liste de 10 000 nombres, il faut donc compter en moyenne 100 000 000 opérations.
- Dans le cas du **tri rapide**, pour une liste de 10 000 nombres, il faut compter 130 000 opérations en moyenne. L'algorithme du tri rapide est donc aussi étrange que performant !

4 Décalage horaire (1)

Partie 1

Une horloge affiche l'heure sous la forme 13h15 et 5h48 par exemple.

L'heure actuelle est accessible à l'aide de deux variables : une **variable h** pour les heures et une **variable m** pour les minutes. On peut modifier la valeur de ces variables.

Tu disposes des instructions :

- `AFFICHER` pour afficher l'heure sous la forme h:m ;
- `RÉINITIALISER` pour afficher l'heure actuelle.

a Quelles sont les valeurs possibles des variables **h** et **m** ?

b Voici un algorithme :

```
RÉINITIALISER
Donner à h la valeur h+1
Donner à m la valeur m-10
AFFICHER
```

Applique cet algorithme quand l'heure actuelle est 4h15.
Dans le cas général, cet algorithme peut-il poser problème ? Pourquoi ?

c Écris un algorithme permettant d'afficher l'heure 1 minute plus tard que l'heure actuelle.

d Écris un algorithme permettant d'afficher l'heure 1 heure plus tard.

e Écris un algorithme permettant d'afficher l'heure 2 heures 24 minutes plus tard.

Partie 2

f Écris un algorithme donnant la somme de deux durées, exprimées sous la forme h1:m1 et h2:m2.

Tu disposes pour cela :
- des variables **h1**, **h2**, **m1**, **m2** ;
- de deux variables **h** et **m**, qui contiendront le résultat ;
- d'une variable **retenue**.

Pour t'aider, voici un début possible pour cet algorithme :

```
Si m1+m2<60
alors
donner à m la valeur m1+m2
donner à retenue la valeur 0
sinon …
```

5 Digicode

Partie 1

Un digicode est une serrure électronique qui s'ouvre en saisissant le code d'entrée d'un immeuble.

Le digicode utilisé dans cette activité est un peu spécial :
- il ne possède que deux touches : le 0 et le 1.
- la serrure s'ouvre dès que le code est reconnu.

Par exemple : si le code est 1-1-0, et que l'on appuie sur les touches 1-1-1-1-0, alors la serrure s'ouvrira car le digicode aura détecté la série 1-1-0.

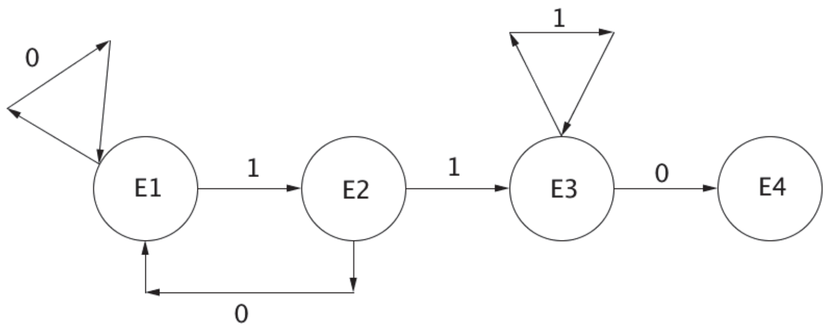
Pour programmer ce digicode, on construit ce que l'on appelle un **automate** dont voici le schéma.

On distingue quatre états : E1, E2, E3 et E4.

L'état initial est l'état E1 : on n'a encore rien saisi.

Si on appuie sur la touche 0, alors on reste dans cet état.

Si on appuie sur la touche 1, alors on passe à l'état E2.



a Que se passe-t-il si on presse la touche 0 quand on est dans l'état E2 ? Pourquoi ?

b À quoi correspond l'état E4 ?

c Décris l'état E3. Explique la boucle sur cet état.

d Construis l'automate correspondant au code 1-0-1-1.

Partie 2

Une machine à café propose des boissons à 20 centimes, mais elle ne rend plus la monnaie.
Elle accepte les pièces de 10 centimes et de 20 centimes.
Ainsi, si l'utilisateur introduit une pièce de 50 centimes, ou s'il introduit une pièce de 10 centimes, puis une autre de 20 centimes, alors la machine rejette toute la monnaie introduite.

e Construis l'automate représentant cette situation. Il comprendra quatre états :
- l'état initial,
- un état intermédiaire (de la monnaie a été introduite, mais le montant n'est pas atteint),
- un état « stop » où la machine annule,
- un état final où la machine sert la boisson.

Point info

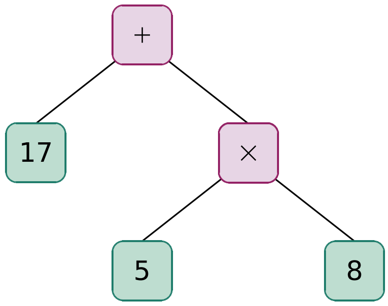
Les automates sont très utilisés en programmation.
Par exemple, pour faciliter la saisie des adresses mail, on peut construire un automate : l'ordinateur vérifie alors que la structure de l'adresse a bien la forme abc123@abc123.abc. C'est ce que l'on appelle l'analyse syntaxique.

Le cœur même de l'ordinateur, celui qui fait les calculs, est conçu à l'aide d'automates.

Faire fonctionner des automates, c'est un peu comme programmer un robot évoluant dans un environnement donné (par exemple, un robot aspirateur). En effet, il faut prévoir les différentes situations (les états) dans lesquelles peut se trouver le robot et lui apprendre comment réagir quand il reçoit telle ou telle information.

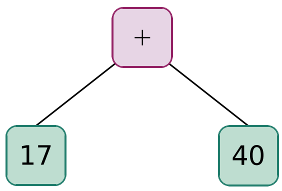
6 Évaluer une expression

Pour évaluer une expression mathématique comme $17 + 5 \times 8$, on la représente à l'aide d'un arbre binaire comme celui-ci :

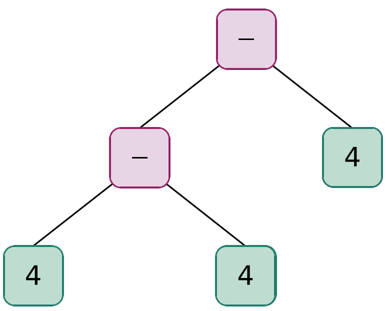


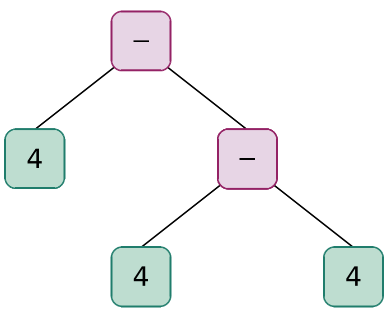
Cet arbre est constitué de cinq nœuds.
La racine de l'arbre est tout en haut (le $+$).
Un nœud peut être un nœud opération ($+$, $-$, $\times$, $\div$) ou un nœud nombre. Chaque nœud opération possède un ou deux enfants.

Pour évaluer l'expression écrite sous la forme d'un arbre, l'ordinateur applique un algorithme complexe. Concrètement, il commence par effectuer les calculs tout en bas de l'arbre et remonte progressivement.



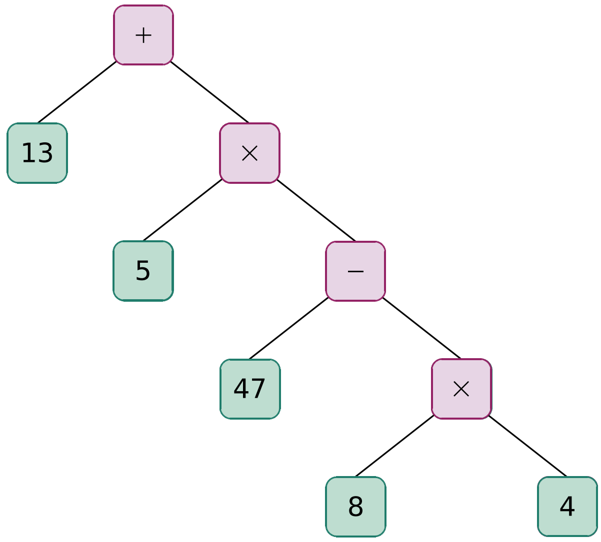
a Évalue chaque arbre ci-dessous et donne l'expression mathématique qui lui correspond.





Qu'est-il nécessaire d'ajouter à l'expression mathématique de l'un des deux arbres ?

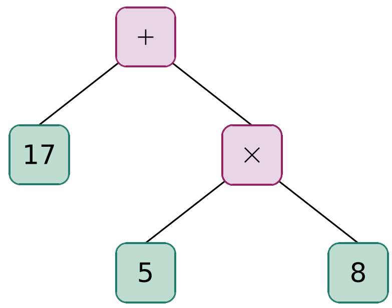
b Même question avec cet arbre.



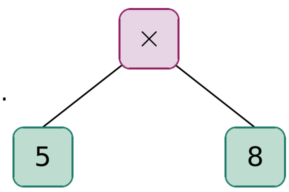
c À l'aide de ces arbres, un programme peut également écrire l'expression mathématique en français.

Exemple :

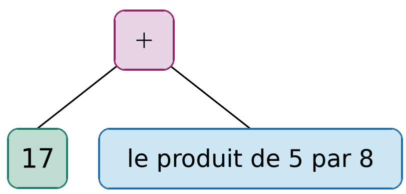
Pour cet arbre,



il peut remplacer
la partie ci-contre par :
« le produit de 5 par 8 ».



On obtient alors l'arbre suivant :



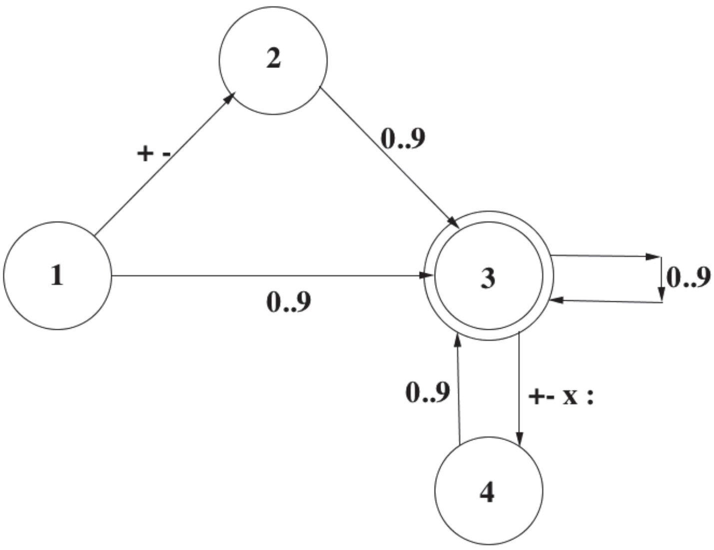
Ce qui donne finalement :
« La somme de 17 et du produit de 5 par 8. »

Construis l'arbre de $5 \times 7 + (17 - 7 \div 3) \div 4$
et écris l'expression correspondante en français.

d Avant de construire et de calculer l'arbre binaire d'une expression, l'ordinateur vérifie si l'expression mathématique est correcte.
Dans cette activité, nous allons nous limiter à des expressions sans parenthèse.

Les expressions mathématiques suivantes sont-elles correctes pour l'ordinateur ?
E1 : $14 + 58 \times 8 +$ E2 : $3 \times 18 + 4 - 71$ E3 : $145 - 33a + 12$ E4 : $45 - + 47$

Tout d'abord, on utilise un **automate de vérification de l'expression** :



L'état 1 est l'état initial.
L'état 3 est l'état final.
L'expression est correcte si on aboutit à cet état final.

Exemples :

- $1 + 5$
  La machine lit le "1". On passe donc à l'état 3.
  Elle lit le "+". On passe donc à l'état 4.
  Elle lit le "5". On retourne donc à l'état 3 et on s'arrête là car l'expression est terminée.
  L'état 3 est un état final. Donc l'expression est correcte.
- $-7 + -8$
  La machine lit le "$-$". On passe donc à l'état 2.
  Elle lit le "7". On passe donc à l'état 3.
  Elle lit le "+". On passe donc à l'état 4.
  Elle lit le "$-$". À l'état 4, l'ordinateur n'est pas autorisé à saisir l'opération. Donc l'expression est incorrecte.

Pour les trois expressions suivantes, décris le parcours dans l'automate, et précise si l'expression est correcte ou non pour l'ordinateur.
E5 : $-45 + + 47$ E6 : $487 \times 85 - a4$ E7 : $-9 \div 9 \times 9 + 9$

Point info

Les **arbres binaires** constituent une manière astucieuse de représenter une expression. Mais ce n'est pas leur seule utilité ! Ils sont également utilisés pour la programmation des jeux de réflexion (les échecs, par exemple) quand l'ordinateur évaluent les différents coups possibles.

Cette représentation est très utilisée en informatique car les ordinateurs sont « doués » pour travailler avec ce type de représentation.

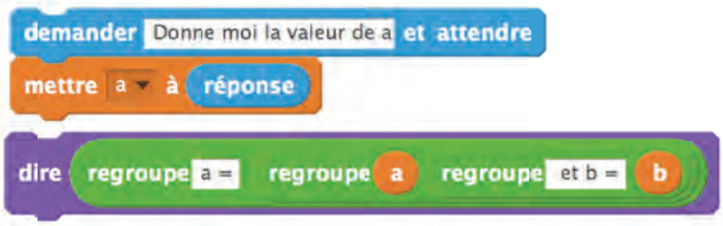
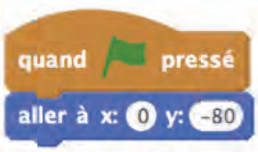
7 Fonction affine

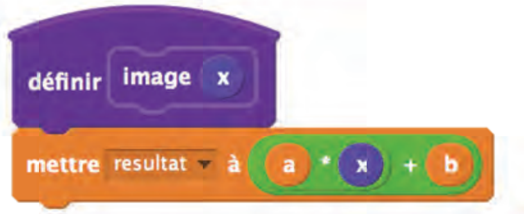
Soit une fonction affine $f(x) = ax + b$.

Dans cette activité, tu vas développer le programme SCRATCH suivant :

Au lancement, le chat demande la valeur de a et la valeur de b. On stocke ces valeurs dans des variables a et b.

Par exemple, quand on clique sur la main droite du garçon, il demande un nombre, puis annonce l'image de ce nombre.
Quand on clique sur sa main gauche, il demande un nombre, puis annonce l'antécédent de ce nombre par la fonction affine f.

Crée deux variables ***a*** et ***b***. Programme le chat pour qu'il puisse récupérer des valeurs pour a et b. Le chat annonce les valeurs de a et de b. →	
Crée un lutin *Boy3*. Positionne-le au centre de la scène. →	
Crée une variable **souris**. Quand on clique sur ce lutin, on stocke **immédiatement** la position horizontale de la souris dans cette variable. →	
Sur le lutin *Boy3*, crée deux **procédures :** - une procédure **image** - une procédure **antécédent** (voir Point info ci-dessous). Pour cela : - clique sur *Créer un bloc*, - nomme ce bloc *image*, - clique sur *Options*, - clique sur *Ajouter une entrée nombre* et saisis la lettre x.	

Crée le code de la procédure **image**. →	
De la même manière, crée la procédure **antécédent** et le code qui lui correspond.	
Le lutin *Boy3* demande un nombre. • Si **souris** x est négatif, il appelle la procédure **image** ; • Sinon, il appelle la procédure **antécédent**. Ces deux procédures calculent la valeur de la variable **résultat**. Il suffit ensuite à *Boy3* de l'afficher. Termine le programme !	

Point info

Voici un exemple pour comprendre le fonctionnement des **procédures** dans Scratch.

Dans un nouveau programme, nous avons créé :

- une variable **s**.

- un bloc, appelé **sommebizarre**, contenant deux **paramètres** a et b. (Ce bloc se trouve dans la catégorie *Ajouter blocs.*)

La procédure ci-contre calcule $a + 2 \times b$ et stocke le résultat dans la variable **s**. →

Cette procédure est utilisée quand on l'appelle. Il faut alors indiquer la valeur de a et celle de b comme ci-contre. →

Ici, la procédure **sommebizarre** est appelée avec a égal à 4, et b égal à 5.

Elle calcule donc $4 + 2 \times 5$ et stocke le résultat dans **s**.

À la fin, le lutin annoncera la valeur de **s**, c'est-à-dire 14 !

Activités

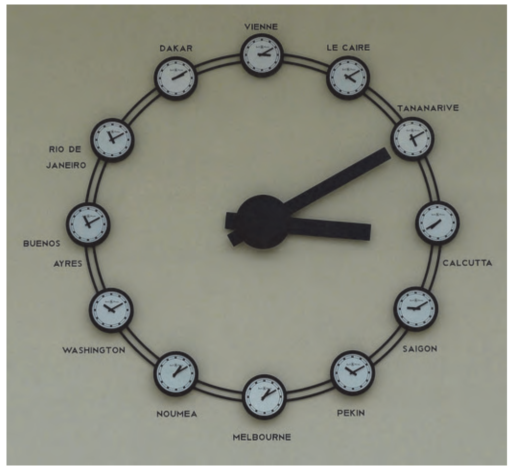
8 Décalage horaire (2)

Certaines horloges indiquent simultanément l'heure de plusieurs capitales dans le monde.

À partir de l'heure actuelle, en France par exemple, un programme leur permet de donner également l'heure à Dakar, Washington, Pékin...
Un tel programme est utile pour rendre compte des décalages horaires.

SCRATCH va te permettre de développer ce programme.
Au départ, il annonce l'heure actuelle et demande à l'utilisateur la durée qu'il faut ajouter pour obtenir l'heure d'une autre ville. Le programme annonce alors l'heure qu'il est dans cette ville.

Tu peux utiliser les techniques algorithmiques de l'**activité 4**.



Dans la catégorie **Capteurs**, on trouve l'expression : `actuel minute` .

Si l'expression est évaluée à 9h17 précises, alors *actuel minute* est égal à 17.
Pour le vérifier, dépose cette instruction et clique sur le bloc.

Dans un nouveau projet, crée une variable **h** et une variable **m**.

Initialise ces variables avec l'heure actuelle.

Puis le lutin annonce l'heure.

```
quand [drapeau] pressé
mettre h à actuel heure
dire regroupe actuel heure regroupe : actuel minute pendant 2 secondes
```

Le lutin doit d'abord demander quelle durée on souhaite ajouter à l'heure actuelle. Pour cela, crée :

- une variable **nbh** (nombre d'heures),
- une variable **nbm** (nombre de minutes).

Le lutin demande donc successivement leur valeur.

```
demander Combien d'heures ajouter ? et attendre
mettre nbh à réponse
demander Combien de minutes ajouter ? et attendre
mettre nbm à réponse
```

Crée le code ci-contre.

Quelle valeur faut-il ajouter à **m** ?

Que faut-il faire si la nouvelle valeur de **m** est supérieure à 60 ?

Code d'une manière analogue la modification de la variable **h**.

```
ajouter à m [redacted]
si m > 60 alors
    ajouter à m [redacted]
    ajouter à h [redacted]
```

À la fin, le lutin annonce la nouvelle heure. Pour ne pas oublier l'heure initiale, crée un second lutin qui l'annoncera au lancement du programme.

9 Écriture binaire d'un nombre

Pour construire un algorithme donnant l'écriture binaire d'un nombre inférieur à 128, on utilise la liste suivante : 64, 32, 16, 8, 4, 2, 1. Reconnais-tu les entiers de cette liste ?

Voici l'algorithme :

```
On considère un entier N dont on cherche l'écriture binaire.
La variable T est, au départ, un texte vide.
• On calcule la partie entière de N/64 ;
• On ajoute, à la fin du texte T, cette partie entière ;
• On calcule le reste R de la division euclidienne de N par 64 ;
• On reprend l'étape 1 en remplaçant N par R, et 64 par l'entier suivant
  de la liste.
```

Point info

La **partie entière** d'un nombre positif est le nombre entier qui lui est immédiatement inférieur.

Partie 1

a Applique cet algorithme à l'entier 61. Que représente T à la fin de l'algorithme ?

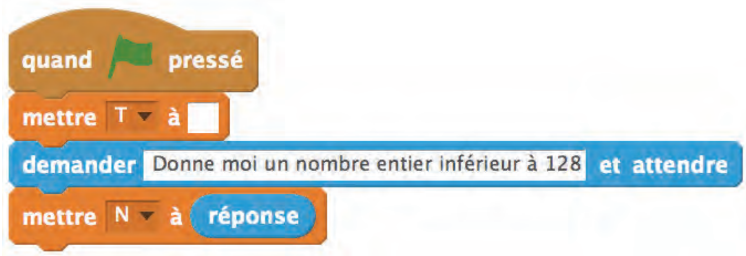
b Pourquoi la liste « 64, 32, 16, 8, 4, 2, 1 » ne permet-elle pas de donner l'écriture binaire des nombres entiers supérieurs ou égaux à 128 ?

c Que faut-il changer dans cette liste pour pouvoir donner l'écriture binaire des entiers inférieurs à 10 000 ? Est-il nécessaire de modifier l'algorithme ?

Partie 2

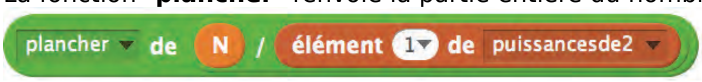
d Dans Scratch, crée :

- les variables **N**, **T**, **E**, **R** ;
- une liste **puissancesde2** : 64, 32, 16, 8, 4, 2, 1 ;
- le programme ci-contre.



Code les quatre instructions de l'algorithme de la **partie 1**.
Pour t'aider, voici quelques indications :

- La fonction "**plancher**" renvoie la partie entière du nombre passé en paramètre :



- l'expression "**regroupe**" (catégorie **Données**) permet de regrouper deux textes.

- l'expression "**modulo**" (catégorie **Opérateurs**) renvoie le reste d'une division euclidienne.

- La quatrième étape consiste à remplacer N par R.

e Teste ton programme avec les entiers 35 et 90. Combien vaut T pour chacun d'eux ? Pourquoi ?

f À l'aide d'une boucle **répéter 7 fois** et d'une variable **k**, complète le programme précédent afin qu'il donne l'écriture binaire d'un entier inférieur à 128.

g Comment modifier le programme pour obtenir l'écriture binaire des entiers inférieurs à 10 000 ?

Point info

De nos jours, nous calculons en base 10 mais cela n'a pas toujours été le cas. Par exemple, les Sumériens calculaient en base 60. Cette base est encore utilisée actuellement dans le système horaire (minutes et secondes). Les Mayas, eux, utilisaient la base 20.

L'ordinateur utilise la base 2, c'est-à-dire le **codage binaire** : « 1 » est représenté par un signal électrique ; « 0 » est représenté par l'absence de signal électrique, ou une valeur trop faible.

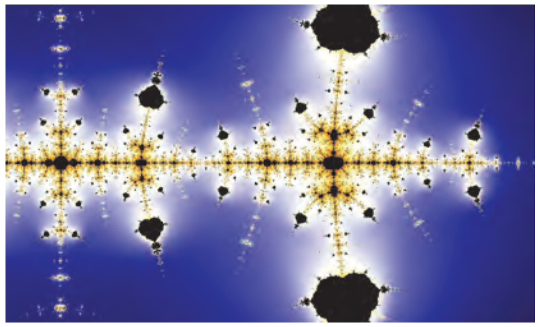
10 Conjecture de Syracuse

Partie 1

Une **suite de Syracuse** est une suite de nombres entiers naturels définie de la manière suivante :

- on part d'un nombre entier plus grand que zéro ;
- s'il est PAIR, on le divise par 2 ;
- s'il est IMPAIR, on le multiplie par 3 et on ajoute 1.
- on recommence à l'étape 2.

En appliquant cet algorithme, on obtient une suite d'entiers positifs, suite qui ne dépend que de son premier terme.



Fractal de Collatz (auteur de cette conjecture)

a Voici les quatre premiers termes d'une telle suite : 10 5 16 8.
Explique ces valeurs et complète la suite. Que remarques-tu ?

b Dans chaque cas, calcule la liste des termes de la suite de Syracuse dont le premier terme est :

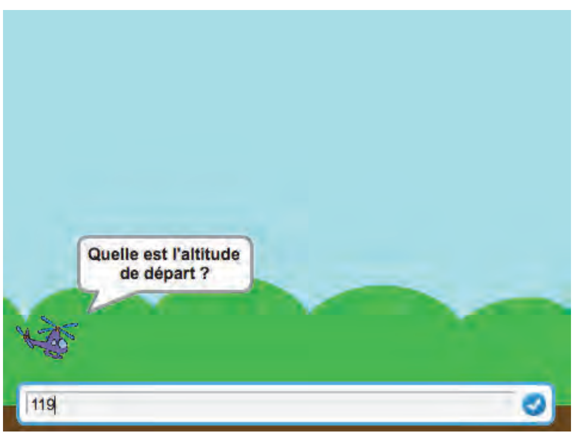
- 11
- 13
- 15
- 20

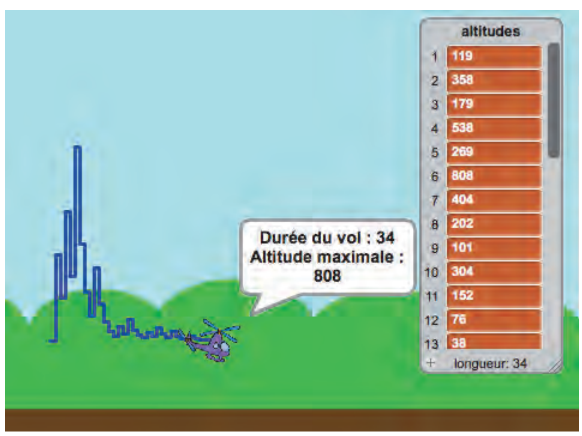
c Pour chaque suite de Syracuse, on distingue le **temps de vol** et l'**altitude maximale**. Par exemple, pour la suite de premier terme 10, le temps de vol est 7 et l'altitude maximale est 16.

Que représentent le temps de vol et l'altitude maximale ?
Détermine ces deux quantités pour les quatre suites de la question **b**.

Partie 2

Tu vas programmer cette situation avec SCRATCH.





Le programme demande le premier terme de la suite, c'est-à-dire l'altitude de départ.
Il calcule ensuite les termes de la suite puis s'arrête quand il obtient 1. La liste **altitudes** contient tous les termes de la suite.
À la fin, le programme annonce l'altitude maximale et le temps de vol.

Crée une liste **altitudes** et une variable **altitude_courante**.

Vide la liste **altitudes**.

Tout d'abord, SCRATCH demande le premier terme de la suite de Syracuse :
- stocke ce terme dans la variable **altitude_courante**.
- stocke-le également dans la liste altitudes.

```
quand [drapeau] pressé
supprimer l'élément (tout) de la liste [altitudes]
demander [Quelle est l'altitude de départ ?] et attendre
mettre [altitude_courante] à (réponse)
ajouter (altitude_courante) à [altitudes]
```

Calculer le terme suivant

Crée et complète le code ci-contre.

L'expression N modulo 2 renvoie le reste de la division par 2.

Donc :
- si N est pair, elle renvoie 0.
- sinon, elle renvoie 1.

```
si <((altitude_courante) modulo (2)) = [0]> alors
    mettre [altitude_courante] à [redacted]
sinon
    mettre [altitude_courante] à [redacted]
```

Répète le bloc précédent jusqu'à ce que la variable **altitude_courante** soit égale à 1.

N'oublie pas de remplir progressivement la liste **altitudes**. Pour cela, utilise les blocs ci-contre.

```
répéter jusqu'à <(altitude_courante) = [1]>

ajouter [redacted] à [altitudes]
```

Pour l'instant, le programme génère correctement la suite.
À présent, il faut représenter ses termes, préciser le temps de vol ainsi que l'altitude maximale.

Déplacer le lutin

Insère au bon endroit les deux blocs ci-contre.
Le second bloc permet de déplacer progressivement le lutin.

Comment modifier l'expression ((-100) + ((altitude_courante) / (5))) si l'altitude de la suite dépasse 5 000 ?
(Essaie ton programme avec 97 par exemple, ou pire avec 703 !).

```
aller à x: (-200) y: (-100)
effacer tout
choisir la taille (3) pour le stylo
stylo en position d'écriture

ajouter (4) à x
donner la valeur ((-100) + ((altitude_courante) / (5))) à y
```

Déterminer l'altitude maximale

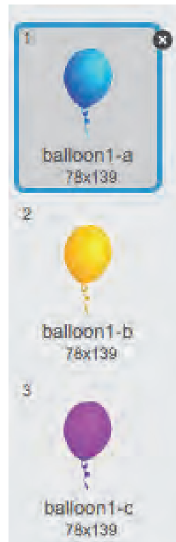
Crée une variable **max** initialisée à 0.
À chaque fois qu'un terme est calculé, on le compare au maximum actuel. S'il est plus grand, alors le maximum prend sa valeur.

```
si <(altitude_courante) > (max)> alors
    mettre [max] à [redacted]
```

Enfin, on affiche les résultats. La durée de vol est tout simplement la (longueur de [altitudes]) !

11 Clonage

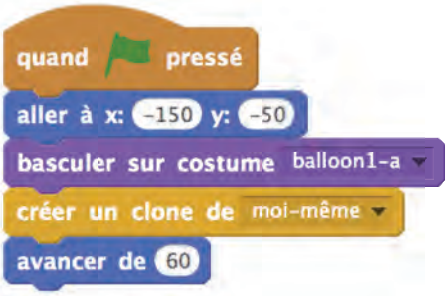
Le clonage consiste à dupliquer un lutin dans le code : un nouveau lutin, identique au premier, apparait alors sur la scène. Il peut avoir son comportement propre grâce à l'évènement "*Quand je commence comme un clone*".
Cette technique permet de créer de jolies animations !

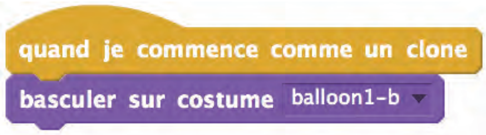


a Voici un exemple pour comprendre le principe du clonage.

Crée un nouveau projet. Efface le chat, présent sur la scène par défaut, et crée un lutin *Balloon1*. Il possède trois costumes : **balloon1-a**, **balloon1-b** et **balloon1-c**.

Crée le code suivant :



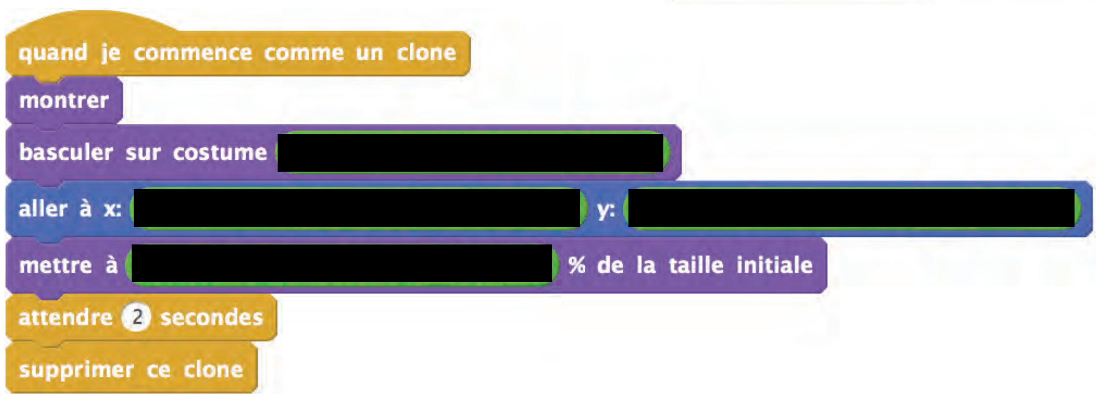


Quelle est la couleur du lutin original ? Et celle du clone ?

Comment obtenir le résultat suivant ?

b À présent, tu vas créer un programme où des lutins *Ball* apparaissent successivement et aléatoirement sur la scène.
Ce sont tous des clones du lutin initial qui est caché.
Pour faciliter le changement aléatoire de costume, les cinq costumes du lutin *Ball* seront renommés : 1, 2, 3, 4, 5.

Voici deux blocs pour t'aider :



Point info

Apparu dans la version 2 de Scratch, le clonage est une technique de programmation complexe. Quand on clone un lutin, on duplique le lutin de départ avec l'ensemble de son script. Le code présent à la suite de « *quand je commence comme un clone* » est alors exécuté.

12 Les jetons de Nathan

Des jetons, ayant chacun une face bleue et une face jaune, sont disposés en ligne, comme ceci :

La règle du jeu est très particulière : on peut retourner n'importe quel jeton. Mais, quand on en retourne un, le jeton situé immédiatement à sa droite se retourne également. Par exemple, si on retourne le troisième jeton, on obtient ceci : 

Cette règle accepte une exception : quand on retourne le dernier jeton, aucun autre ne se retourne.

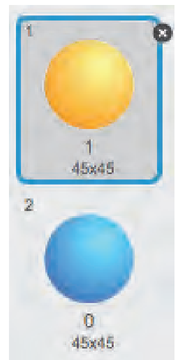
La partie est gagnée quand les jetons sont tous de couleur bleue.

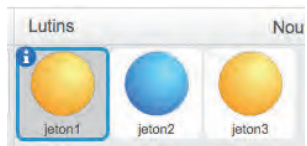
Partie 1

Dans cette partie, tu vas programmer ce jeu avec trois jetons.

Initialement, ils sont disposés comme ceci : 

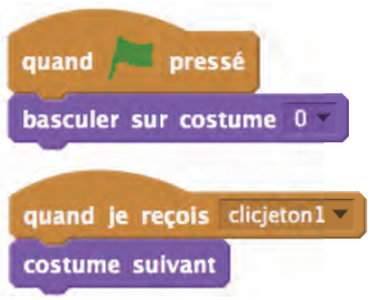
Crée un lutin *Jeton1* comportant deux costumes (nommés "1" et "0").

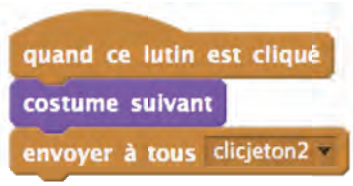


Duplique ce lutin afin d'obtenir les deux autres jetons : 

Sur *Jeton1*, crée le code ci-dessous :

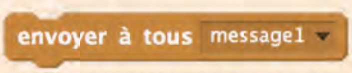
Sur *Jeton2*, crée le code ci-dessous :





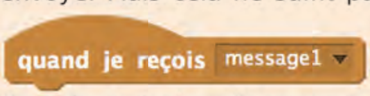
Sur *Jeton2*, on crée :
- un écouteur (ce qu'il faut faire quand il reçoit "clicjeton1"),
- un évènement "clicjeton2" quand on clique sur lui.

Point info

Quand l'instruction  est exécutée, tous les autres lutins en sont informés.

C'est un peu comme s'ils recevaient un courrier.

Dans l'activité ci-dessus, quand on clique sur le premier jeton, le message appelé "clicbouton1" est envoyé. Mais cela ne suffit pas ! *Jeton2* doit aller chercher le message (il doit ouvrir son courrier) :



. Le code qui suit cette instruction est appelé **écouteur**.

Ces deux instructions sont appelées **instructions évènementielles** : la première diffuse un évènement (envoi d'un courrier), la seconde est à l'écoute des diffusions éventuelles (ouverture des courriers).

Crée le code de *Jeton3* puis teste ton programme !

Partie 2

Dans cette partie, nous allons programmer la correction. Pour cela, le programme doit pouvoir détecter quand les trois jetons sont de couleur bleue.

Crée un lutin *Arbitre*.

Crée une liste "**lignejetons**".

Sur le lutin *Arbitre*, initialise la liste ci-contre, avec :
- « 1 » pour la couleur jaune,
- « 0 » la couleur bleue.

Cette liste décrit à chaque instant l'état de la ligne de jetons.

Dans l'exemple ci-contre, "**lignejetons**" est égal à [1,0,1] : le 1er et le 3^{e} jetons sont jaunes, le 2^{e} est bleu.

Quand on retourne un jeton, c'est-à-dire quand on change le costume d'un jeton, il faut modifier le contenu de la case correspondante dans la liste "**lignejetons**". Si elle vaut 1, alors elle passe à 0. Et si elle vaut 0, alors elle passe à 1.
Pour cela, insère (et complète) l'instruction suivante dans les codes des différents lutins.

C'est le lutin *Arbitre* qui testera à chaque instant l'état de la ligne de jetons.
Si les trois cases de la liste "**lignejetons**" sont égales à 0, alors la partie est gagnée !
Crée le code suivant sur *Arbitre :*

Partie 3

À présent, nous allons modifier le programme précédent afin de jouer avec cinq jetons (ou plus, si tu le souhaites).

Au départ, les jetons sont placés aléatoirement :

Quand c'est terminé, le lutin *Arbitre* diffuse un évènement appelé "GO" :

Chaque lutin *Jeton* reçoit cet évènement. Il commence alors par montrer la bonne face, c'est-à-dire le costume "1" ou le costume "2" :

Teste ton programme.

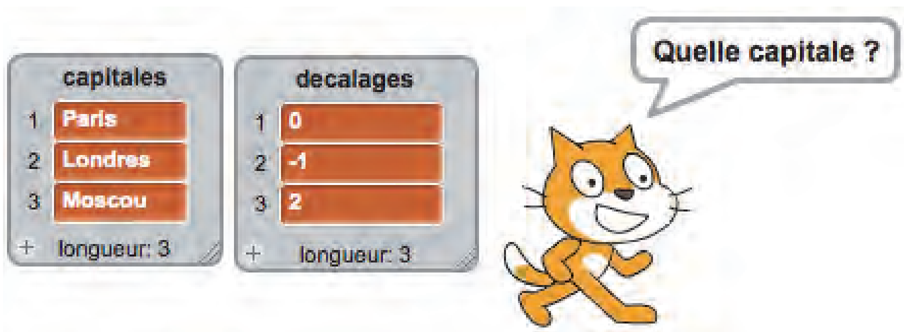
À ton avis, est-on certain de pouvoir parvenir à une ligne de jetons bleus ? Pourquoi ?
Peux-tu donner un algorithme général pour y parvenir ?

Projet 1 : Décalage horaire (3)

Dans l'**activité 8 Décalage horaire (2)**, on ajoute une durée quelconque à une heure **h**, ce qui permet d'annoncer une nouvelle heure.

À présent, on souhaite développer un projet qui donnera l'heure actuelle dans une capitale donnée.

Commence par créer deux listes :
- une liste **capitales** contenant des capitales réparties dans le Monde,
- une liste **decalages** contenant le décalage en heure par rapport à l'heure de Paris.



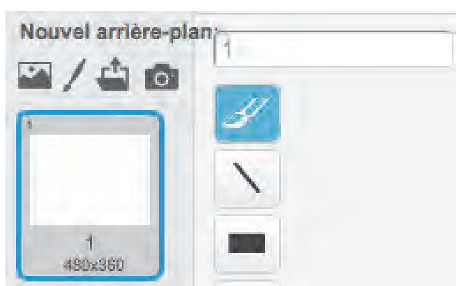
Le premier test consiste à vérifier que la ville saisie figure bien dans la liste **capitales**.

Si l'utilisateur a saisi "Moscou", alors il faut rechercher Moscou dans la liste **capitales**, en parcourant la liste à l'aide d'un variable **k**.

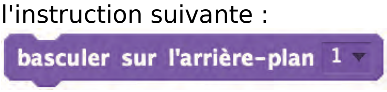
Quand on a trouvé "Moscou", pour une certaine valeur de **k**, on stocke la valeur correspondante de la liste **decalages** dans une variable quelconque (ci-contre, c'est "undecalage").

Selon la capitale demandée, il est possible de modifier l'arrière-plan.

Pour cela, on crée un arrière-plan par capitale, que l'on nomme 1, 2, 3...

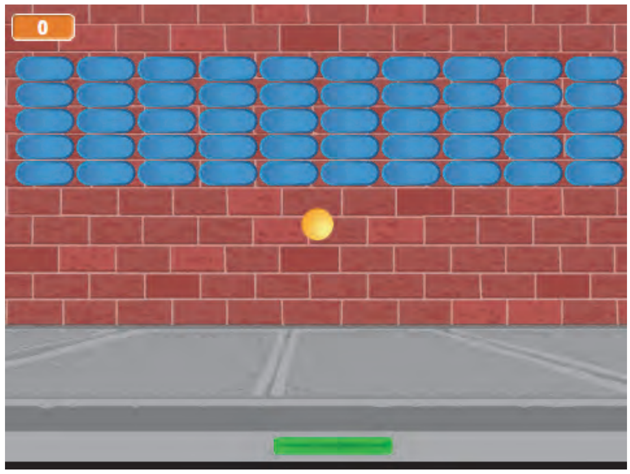


Puis on insère dans le code précédent l'instruction suivante :

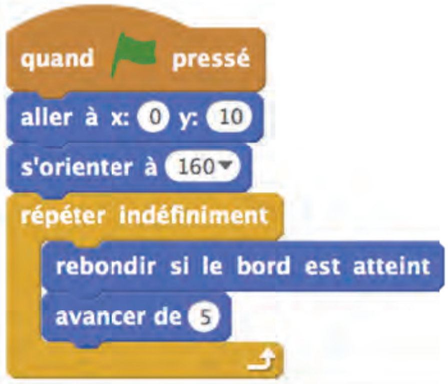
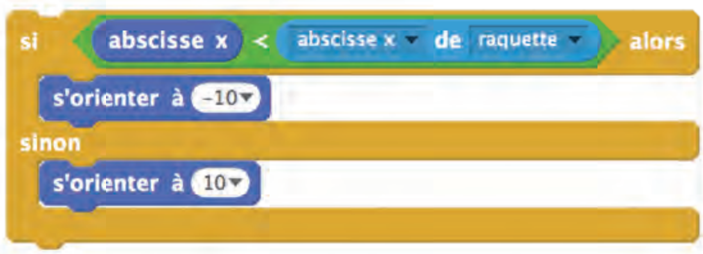


.

Projet 2 :
Du « Pong ! » au casse-briques



Partie 1 : Programmons un « Pong ! »

<table>
<tr><td>Commence par créer un lutin Ball qui se déplace sur la scène en rebondissant sur les côtés.</td><td></td></tr>
<tr><td>Pour représenter la raquette, crée un lutin qui se déplacera à l'aide des touches du clavier ou de la souris.</td><td></td></tr>
<tr><td>Quand la balle touche la raquette, elle doit rebondir, donc changer d'orientation.
Si l'orientation est égale à 0, alors la balle est orientée vers le haut.
Si l'orientation vaut 30, alors la balle est orientée vers le haut à droite.
Si l'orientation vaut – 30, alors la balle est orientée vers le haut à gauche.
Ceci est une possibilité. →</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Dans les jeux de raquettes, généralement, plus la balle touche le bord de la raquette, plus l'angle de rebond est important. On peut simuler un tel comportement en utilisant l'instruction ci-dessous.
</td></tr>
<tr><td>La partie est perdue si la raquette manque la balle.
Pour cela, on peut, par exemple, créer un lutin en forme de rectangle (appelé Rectangle), placé au bas de la scène et occupant toute sa largeur.</td><td></td></tr>
</table>

Partie 2 : Programmer un casse-briques !

Créer une première brique

Crée un lutin *Brique* et programme le code ci-contre sur ce lutin.

L'instruction `envoyer à tous demi-tour` permet d'informer tous les lutins que la brique a été touchée.

```
quand [drapeau] pressé
montrer
répéter indéfiniment
    si <■ touché?> alors
        cacher
        envoyer à tous [demi-tour]
```

Le lutin *Ball* sera informé de cet évènement si on insère l'écouteur ci-contre dans son code.

```
quand je reçois [demi-tour]
s'orienter à (180 - direction)
```

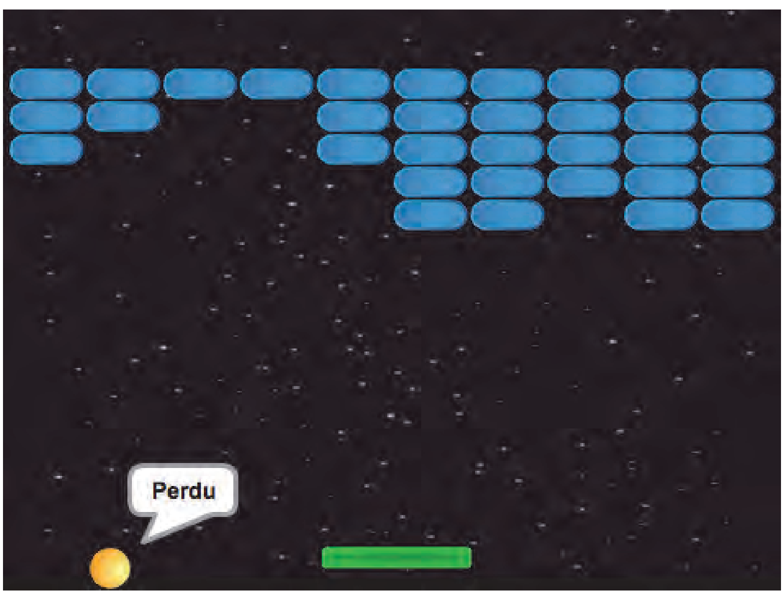
Dupliquer la brique

Duplique la brique autant de fois que nécessaire pour créer un tableau de briques.
Ajoute une variable contenant le nombre de briques touchées.
Quand ce nombre atteint le nombre total de briques, alors la partie est gagnée.

Augmenter la vitesse

Dans le programme ci-dessus, la vitesse est constante et égale à 5.
Mais il est possible d'augmenter la vitesse progressivement.

Par exemple : `avancer de (10 + (briquestouchees / 5))`

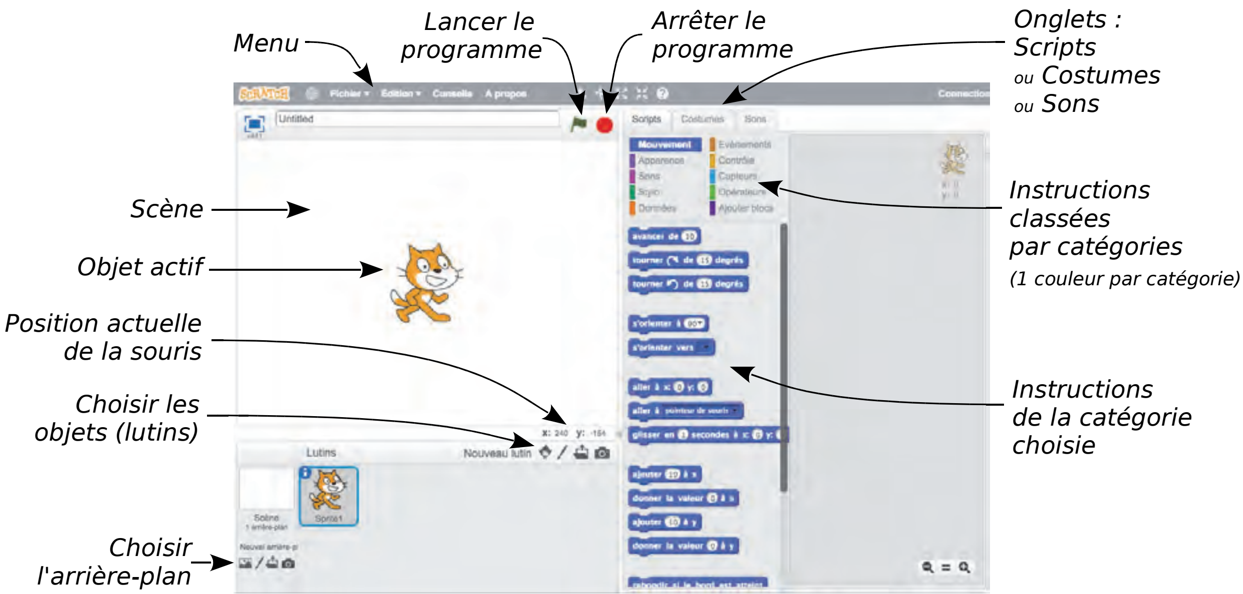


Présentation générale

Tu peux utiliser le logiciel en ligne ou hors connexion. Plus d'infos : g5.re/scr

Si ta version n'est pas en français, clique sur le globe : SCRATCH

Au lancement de SCRATCH, un chat se trouve au centre d'une **scène**, comme ci-dessous.



La largeur de la scène est égale à 480 points et sa hauteur à 360 points.

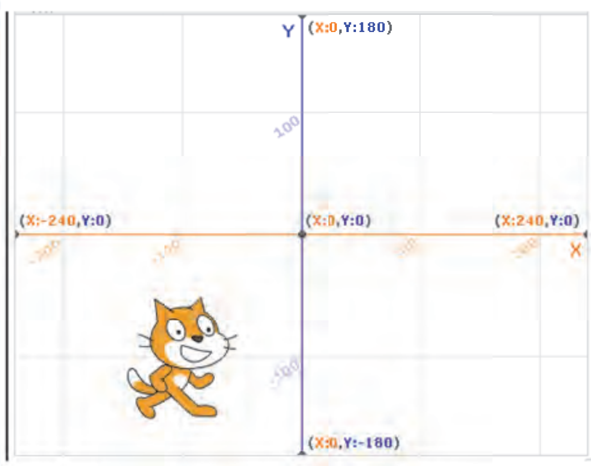
Dans SCRATCH, un objet est appelé « lutin ».

On le positionne à l'aide de deux coordonnées qui sont désignées par les lettres **x** et **y**.

La première coordonnée, **x**, varie entre – 240 et 240 et la seconde coordonnée, **y**, varie entre – 180 et 180.

Par exemple, le chat ci-contre est à la position (– 100 ; – 100).

Les coordonnées du chat s'affichent en haut à droite de la fenêtre *Scripts*.



L'arrière-plan *xy-grid* permet de voir la grille et les coordonnées.

Pour mieux comprendre ce système de repérage, déplace le chat à l'aide de la souris et observe ses coordonnées (fenêtre *Scripts* en haut à droite).

Le cadre bleu montre que le chat est sélectionné.

Sur la scène, tu peux trouver deux types d'éléments :
- le **décor** (en arrière-plan) ;
- les objets qui sont appelés **lutins**.

Pour agir sur un lutin, on écrit un programme dans la fenêtre *Scripts* (chaque lutin a son programme).
Tu vas maintenant apprendre à écrire un programme qui agira sur le chat.

Tutoriel SCRATCH

Dans la catégorie **Évènements**, sélectionne l'instruction **quand [drapeau] cliqué**, puis dépose-la dans la partie droite de la fenêtre *Scripts*.

Dans la catégorie **Mouvement**, sélectionne l'instruction **avancer de 10**, puis dépose-la à la suite de l'instruction précédente. Ces deux instructions s'emboitent (elles ont la forme de pièces de puzzle).

Tu obtiens le script ci-contre. →

Dans la petite zone ovale, écris « 20 » à la place de 10.

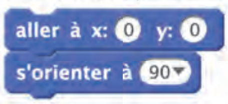
À chaque fois que tu cliqueras sur le drapeau [drapeau] (en haut, au milieu), ton programme sera exécuté et le chat avancera de 20 points. Comme il est orienté vers la droite, il avancera de 20 points vers la droite.

Entre deux lancements, tu peux déplacer le chat à la souris. Si tu lances le programme, il se déplacera de 20 points vers la droite à partir de cette nouvelle position.

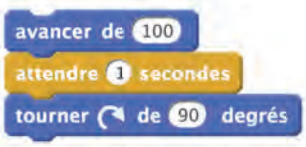
Saisis maintenant le programme ci-contre. →

L'instruction **attendre 1 secondes** se trouve dans la catégorie **Contrôle**.

On commence par placer le chat en (0 ; 0) et on l'oriente vers la droite grâce au couple d'instructions :



Puis on exécute successivement 4 fois ces instructions :



Elles se répéteront 4 fois quand le programme sera exécuté.

Pour éviter ces répétitions d'instructions, on utilise l'instruction de **Contrôle** :

Pour supprimer une instruction ou un bloc d'instructions, il suffit de faire un clic droit sur le bloc et de choisir *Supprimer*. Tu peux également détacher les blocs du programme.

Pour terminer ce petit programme, nous allons maintenant demander au chat de laisser une trace de son passage.

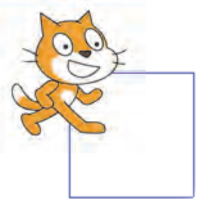
Un stylo invisible est attaché à chaque objet de SCRATCH (ici, le chat). Par défaut, le stylo est relevé et donc, quand le chat se déplace, aucun trait n'est dessiné.

Pour mettre le stylo en position d'écriture, utilise les instructions de la catégorie **Stylo** et modifie le programme comme ci-contre.

Voici la procédure :

- le chat va en (0 ; 0) ;
- on l'oriente vers la droite ;
- on efface tous les traits ;
- on pose le stylo.

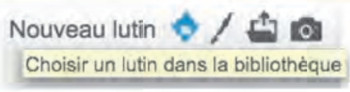
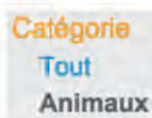
Lance le programme... et découvre le résultat !



Le jeu du labyrinthe

But du jeu :
Le perroquet doit rejoindre le papillon à la sortie du labyrinthe.
Il doit éviter les murs et les sorcières, sous peine d'être renvoyé à la case *Départ*.

Création du lutin-héros (le perroquet) qui se déplacera dans le labyrinthe

Crée un nouveau projet : Fichier / Nouveau Efface le lutin *Sprite1* : clic droit / *Supprimer*	
Clique sur le bouton *Choisir un lutin dans la bibliothèque*.	
Sélectionne la catégorie *Animaux*.	
Puis double-clique sur *Parrot2*. Il apparait sur la scène, ainsi que dans la fenêtre contenant les différents lutins du programme.	

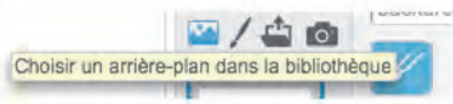
Création du lutin-cible (le papillon)

Crée un deuxième lutin dans la bibliothèque.
Choisis le lutin *Butterfly2*.
Maintenant, deux lutins occupent la scène.
Pour l'instant, ne te préoccupe pas de leur taille, ni de leur position sur la scène.

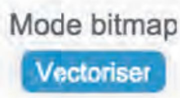
Création du labyrinthe

Sélectionne l'*Arrière-plan* et vérifie que l'onglet *Arrière-plan* est actif.

Sélectionne une image d'arrière-plan : par exemple, l'arrière-plan *slopes* (que tu trouveras rapidement en cliquant sur le thème *Vacances*).
Il apparait alors sur la scène.



En bas à droite de l'écran, clique sur le bouton *Vectoriser* pour passer en mode *Vecteur*, à moins qu'il ne soit déjà sélectionné. Dans ce cas, *Mode Vecteur* et *Convertir en bitmap* sont affichés.

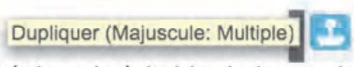


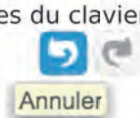
Réalise le premier mur du labyrinthe en créant un rectangle bleu.
Pour cela, utilise la barre d'outils située tout à droite de l'écran :

- clique sur le bouton : 

- sélectionne la couleur bleue pour le fond et pour le contour : 
- vérifie que c'est bien un rectangle plein qui va être construit : 

Puis trace le rectangle de la taille souhaitée.

Crée les autres murs.
Clique sur le bouton *Dupliquer* : 

, puis sur le nouveau rectangle (parfaitement superposé au premier). Déplace-le à l'aide de la souris ou des touches fléchées du clavier.
À tout moment, tu peux annuler tes dernières constructions en cliquant sur *Annuler* : 

.

Recommence plusieurs fois les constructions précédentes afin d'obtenir ton labyrinthe.

Positionne les deux lutins correctement, en les déplaçant sur la scène à l'aide de la souris.
Tu devras sans doute changer leur taille.

Pour cela, utilise les boutons *Agrandir* et *Réduire* :

Ainsi, pour réduire *Parrot2*, clique sur le bouton *Réduire*, puis clique autant de fois que nécessaire sur le perroquet situé sur la scène.

Repère les coordonnées initiales de *Parrot2* (en haut à droite de la fenêtre *Scripts*).
Par exemple : **x** = – 139 et **y** = – 115.

Enregistre ton projet. Pour cela, il faut ouvrir un compte SCRATCH. Suis la procédure proposée à l'écran.

Déplacement du lutin *Perroquet*

À chaque lancement du programme, le perroquet doit partir de ses coordonnées de départ. Pour cela, insère l'instruction ci-contre (onglet *Scripts*) et indique les coordonnées repérées précédemment (– 139 ; – 115).

Attention : vérifie que *Parrot2* est bien sélectionné !

Crée les évènements suivants pour permettre au lutin *Parrot2* de se déplacer.

Pour dupliquer, fais un clic droit sur un bloc : tu gagneras du temps !

Teste le programme et *enregistre ton projet*.

Pour l'instant, le perroquet avance avec les flèches du clavier, mais ignore complètement l'arrière-plan : il doit éviter les murs !

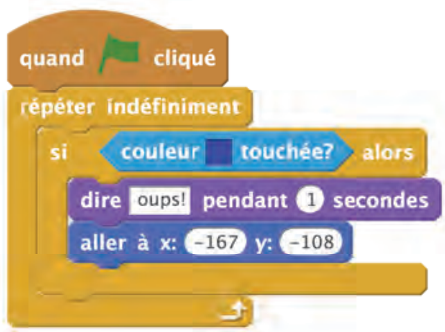
Éviter les murs

Pour éviter les murs, crée le code ci-contre.
Vérifie que *Parrot2* est bien sélectionné car c'est lui qui se déplace dans le labyrinthe.

L'expression « couleur ■ touchée? » se trouve dans la catégorie **Capteurs**. Pour obtenir le petit carré bleu dans *Couleur touchée*, clique sur ce carré, puis sur un mur bleu de la scène.

L'instruction « dire oups! pendant 1 secondes » se trouve dans la catégorie **Apparence**.

À chaque lancement du programme, ce code sera exécuté indéfiniment. Donc, dès que *Parrot2* touche la couleur bleue (un mur), il dit « *oups!* » et, une seconde plus tard, retourne à sa position de départ.



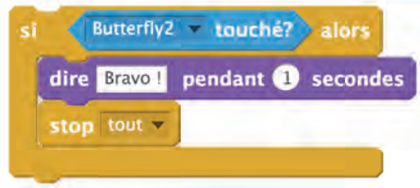
Teste le programme et *enregistre ton projet.*

À présent, le perroquet réagit dès qu'il touche un mur.
Mais pour que la partie soit gagnée, il doit **toucher le papillon** à la sortie du labyrinthe !

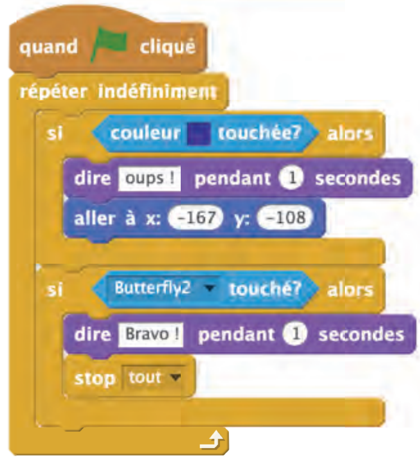
Gestion de la sortie du labyrinthe

Pour gagner la partie, *Parrot2* doit toucher *Butterfly2*. Pour cela, crée le code ci-contre.

L'instruction stop tout se trouve dans la catégorie **Contrôle**. Elle stoppe le programme attaché au lutin.



Insère ce bloc à la suite du précédent.



Teste le programme et *enregistre ton projet.*

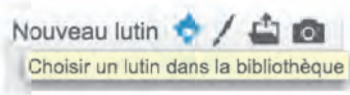
Affichage d'un chronomètre

Quand on lance un programme dans SCRATCH, un chronomètre démarre automatiquement. C'est ce qu'on appelle une **variable**.

Par exemple, si le programme est lancé depuis 17 secondes, alors la variable chronomètre vaut 17. Une seconde plus tard, elle vaudra 18. Elle varie donc tout le temps !

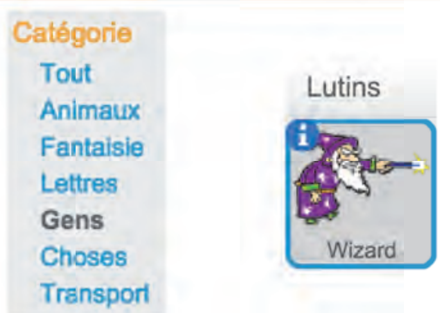
Tu vas créer un nouveau lutin qui sera « maitre du temps ». Sa mission consistera à annoncer le chronomètre toutes les secondes !

Clique sur *Choisir un lutin.*



Dans la catégorie *Gens*, sélectionne le lutin *Wizard* (« sorcier » en français) et clique sur OK.

Le sorcier apparait sur la scène.



Réduis sa taille en cliquant sur le bouton *Réduire*, puis sur *Wizard*, autant de fois que nécessaire.

Positionne-le en haut à gauche de la scène.

Vérifie que *Wizard* est bien sélectionné, puis crée le code ci-contre.

La variable chronomètre se trouve dans la catégorie **Capteurs**. Les variables qui ont la forme ovale sont des **expressions**.

Ce code est appelé en permanence, c'est-à-dire qu'à chaque appel, *Wizard* annonce le chronomètre, **attend** 1 seconde, puis ré-exécute le code...

Pour bien comprendre le fonctionnement du chronomètre, teste le programme.

On remarque que le chronomètre ne tombe pas juste. Pour régler ce problème, on va demander au programme un arrondi du chronomètre.

L'instruction arrondi de est dans le thème **Opérateurs**. Modifie l'instruction comme ci-contre.

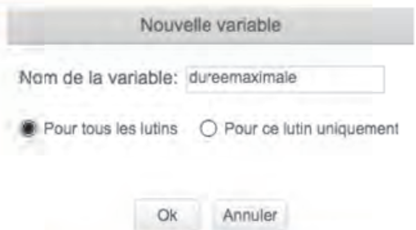
Enregistre ton projet.

Temps-limite et perte de la partie

Il s'agit de créer une variable contenant la durée maximale autorisée pour sortir du labyrinthe.

Dans la catégorie **Données**, clique sur le bouton *Créer une variable*.

Nomme-la : *dureemaximale*.



Cette durée maximale sera fixée à 60 secondes.

Sélectionne *Parrot2* et insère l'instruction mettre dureemaximale à 60 au début de son programme.

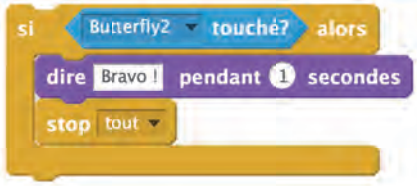
La partie est perdue si le temps-limite est dépassé, c'est-à-dire si le chronomètre dépasse 60 secondes.

Cette donnée concerne *Parrot2*.
Insère donc le bloc ci-contre à son programme.

Affichage du score

La partie est gagnée quand *Parrot2* atteint *Butterfly2*.

Pour afficher le score, nous allons insérer une nouvelle instruction au bloc ci-contre.



Avant 

, insère l'instruction :

Si *Parrot2* met 40 secondes à sortir du labyrinthe, le score est alors égal à :

, c'est-à-dire : 60 – 40 = 20 secondes.

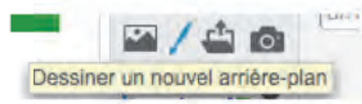
S'il met 35 secondes, le score sera alors supérieur : 60 – 35 = 25 secondes !

Création d'un arrière-plan de fin de partie

On décide que la partie est perdue dès que le chronomètre dépasse la variable *dureemaximale*.
Le mot «PERDU ! » s'affiche alors en grand sur l'écran.

Crée un nouvel arrière-plan contenant le mot « *PERDU !* », en cliquant successivement sur :

- l'arrière-plan actuel (en bas à gauche),
- l'onglet *Arrière-plans*,
- le bouton *Dessiner un nouvel arrière-plan*.



Écris le texte « *PERDU !* » et agrandis-le.
Renomme cet arrière-plan : *PERDU !*

Sélectionne *Parrot2* et ajoute le code ci-contre.

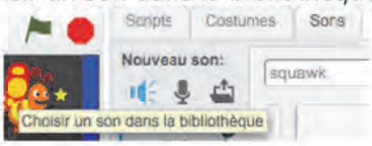
Quand le chronomètre dépasse la variable *dureemaximale*, on bascule sur l'arrière-plan *PERDU !* et le programme s'arrête.

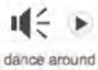
Attention : au lancement de la partie, veille à ce que l'arrière-plan de départ soit le bon !

Enregistre ton programme.

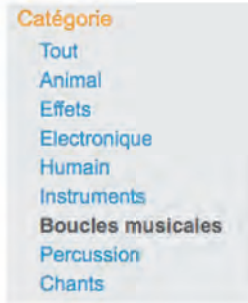
Sonorisation du jeu

Sélectionne *Parrot2*, clique sur l'onglet *Sons* , puis sur *Choisir un son dans la bibliothèque*.



Dans la catégorie *Boucles musicales*, sélectionne la boucle *dance around* : 

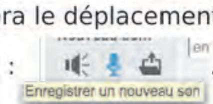
.



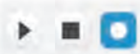
Clique sur l'onglet *Scripts*.

Insère les instructions ci-contre ; elles seront exécutées au début du programme.

À présent, nous allons créer un son (avec ta voix) qui accompagnera le déplacement de *Parrot2*.

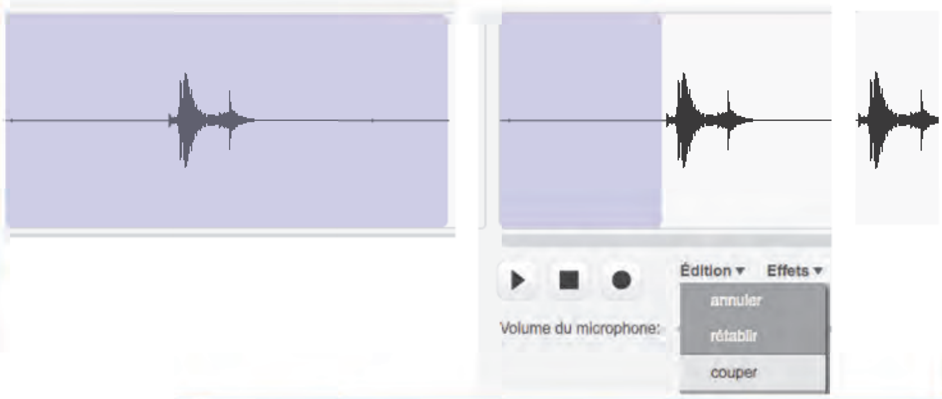
Sélectionne l'onglet *Sons* et clique sur *Enregistrer un nouveau son* : 

.

Pour enregistrer ta voix, clique sur *Enregistrer* :  , puis à nouveau sur ce bouton pour stopper l'enregistrement.

Pour ne pas ralentir les déplacements de *Parrot2*, le son doit être bref.

Procède comme ci-contre.



Si tu n'as rien changé, ce nouveau son a pour nom : *enregistrement1*.

Clique sur l'onglet *Scripts* et insère les instructions ci-contre.

Enregistre ton programme.

Si tu avais inséré l'instruction **jouer du tambour 1 pendant 0.25 temps**, le programme aurait attendu la fin du son pour continuer, ce qui aurait tellement ralenti les déplacements du lutin que le jeu n'aurait pas pu fonctionner correctement.

Avec le son que nous avons installé, le programme n'attend pas la fin du son et le rythme du jeu n'est pas affecté.

Création d'un obstacle mobile

Crée un nouveau lutin *Witch* : .

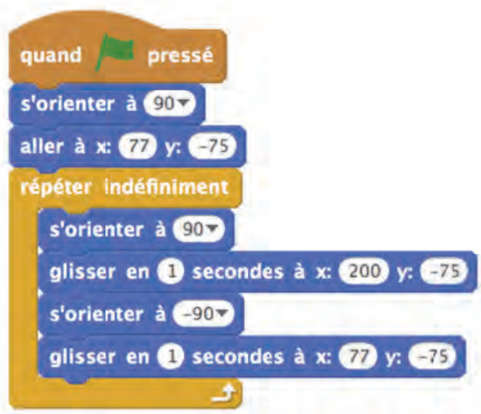
Réduis sa taille et positionne le personnage en bas à droite de l'écran : cette sorcière va faire des allers-retours, de droite à gauche, en restant à la même hauteur.
Il faudra absolument l'éviter !

Admettons qu'elle se trouve sur la scène en (77 ; − 75).
Attention : tes coordonnées peuvent être différentes !

Pour programmer ses déplacements, on utilise l'instruction : **glisser en 1 secondes à x: y:** .

(Elle permet de créer facilement de nombreux circuits.)

Vérifie que le sens d'orientation de *Witch* est correct :



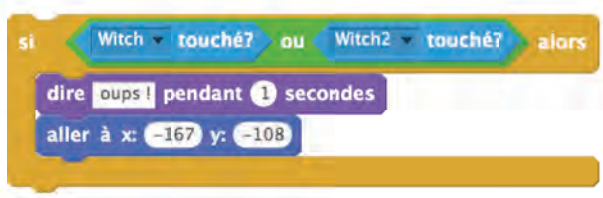
Créer d'autres obstacles

Duplique le lutin *Witch* (son code sera dupliqué également).
Witch2 apparait alors sur la scène. Tu n'as plus qu'à modifier son code pour adapter son déplacement.

Programmer la collision éventuelle
de *Parrot2* avec l'une des deux sorcières :

Crée le code ci-contre pour qu'à chaque instant, le programme teste si *Parrot2* touche *Witch* ou *Witch2*. Si c'est le cas, alors *Parrot2* retourne à la case Départ !

Attention : veille à ce que ces instructions soient bien déposées sur le script de *Parrot2* !



Exemple de paramétrage du jeu à l'aide d'une variable

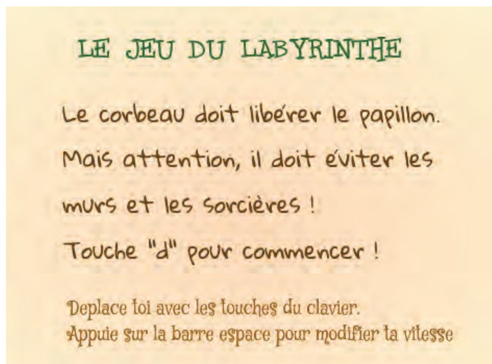
Crée une variable **vitesse**. Attention : il faut que la case soit cochée pour voir sa valeur sur la scène. Au début du programme, initialise-la à 10.	Créer une variable ☑ vitesse mettre vitesse à 10
Modifie les instructions de déplacement, telles que celle-ci : ajouter 10 à x. Pour obtenir un nombre négatif, tu multiplieras la variable par – 1 (les expressions mathématiques figurent dans la catégorie **Opérateurs**). N'oublie pas de modifier les deux autres déplacements.	ajouter vitesse à x ajouter -1 * vitesse à x
En cours de jeu, on souhaite pouvoir changer de vitesse. Par défaut, la vitesse est 10. Si on appuie sur la barre *Espace*, alors elle passe à 40. Si on appuie à nouveau, elle revient à 10, et ainsi de suite. Pour programmer cet évènement, utilise l'instruction de **Contrôle** : si alors / sinon.	quand espace est cliqué si vitesse = 10 alors mettre vitesse à 40 sinon mettre vitesse à 10

Création d'une page de démarrage

Au lancement de la partie, on souhaite afficher un écran de présentation dans lequel on décrit succinctement les objectifs du jeu.

Crée un arrière-plan *Presentation* et complète-le à ta guise (tu peux t'inspirer de l'exemple ci-contre).

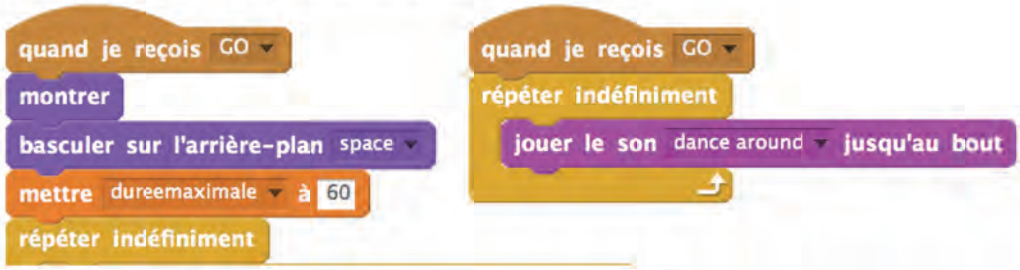
Au lancement, c'est cet arrière-plan qui doit être visible.



Commence par cacher **tous les lutins** en appliquant ce code à chaque lutin.	quand 🏴 pressé cacher
Au lancement du programme, l'arrière-plan *Presentation* s'affiche. Le jeu commence quand le joueur appuie sur la touche « **D** ». Sur le lutin *Parrot2*, modifie le code comme ci-contre.	quand 🏴 pressé cacher basculer sur l'arrière-plan presentation quand d est pressé envoyer à tous GO

Modifie le code de tous les personnages, comme indiqué ci-dessous :

Sur *Parrot2* :



Sur *Witch* et *Witch2* :

Sur *Wizard* :

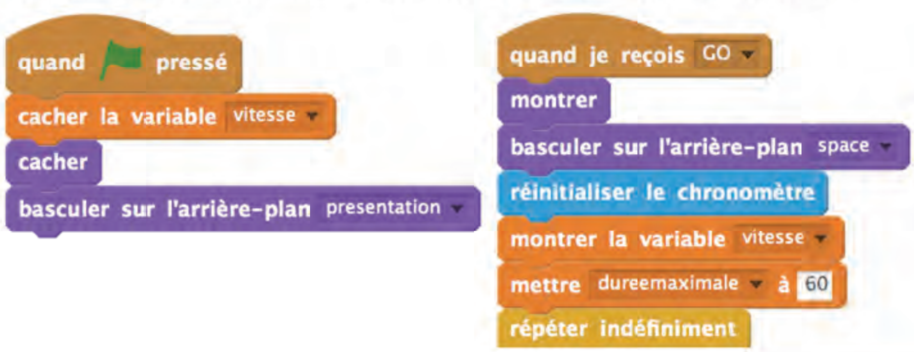
Sur *Butterfly2* :

Quand le joueur appuie sur « **D** », alors un **évènement** "GO" est diffusé.

Quand les lutins reçoivent cet évènement, ils s'affichent et le jeu est lancé.
Attention : il ne faut pas oublier à ce moment de choisir l'arrière-plan du jeu !

Il reste deux détails à régler :

- Tout d'abord, il faut réinitialiser le chronomètre au lancement effectif du jeu. En effet, le chronomètre commence à défiler dès le lancement du jeu, c'est-à-dire pendant la lecture de l'écran de présentation. L'instruction *réinitialiser le chronomètre* de la catégorie **Capteurs** permet de remettre le chronomètre à zéro.
- Ensuite, il faut masquer, puis afficher, la variable *vitesse*. Dans la catégorie **Données**, les instructions *cacher-montrer la variable*... permettent de le faire à partir du code.

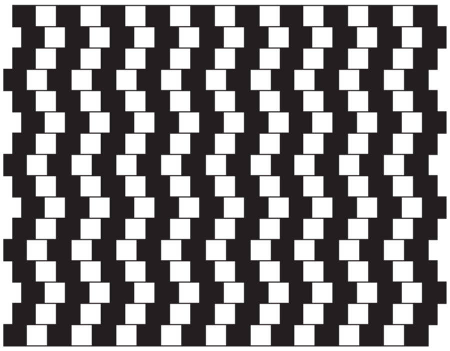


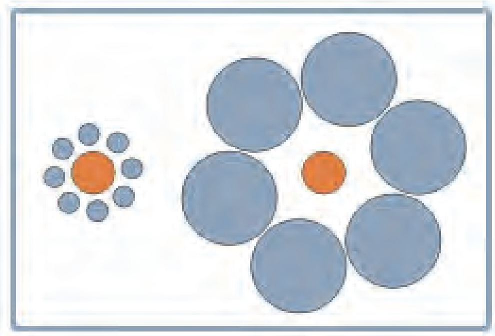
FIN

Des outils pour raisonner

Activités

1 Il faut se méfier de ce que l'on voit.





Illusion de Titchener

a Comment semblent les lignes de la première image ? Et pourtant...

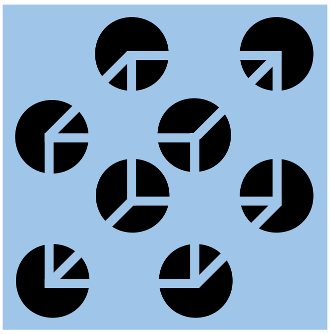
b Que dire des deux disques orange de la deuxième image ? Et pourtant...

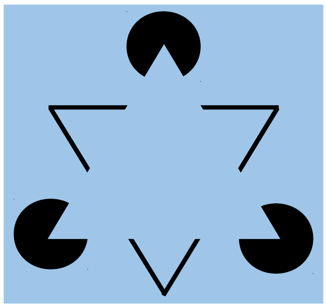
c Trace précisément deux cercles concentriques de rayons 2 cm et 2,2 cm. À côté, trace deux autres cercles concentriques de rayons 1,8 cm et 2 cm. Que vois-tu ?

d Essaie de trouver ou de fabriquer d'autres illusions d'optique que tu montreras à tes camarades.

2 Il faut se méfier de ce qui n'existe pas.

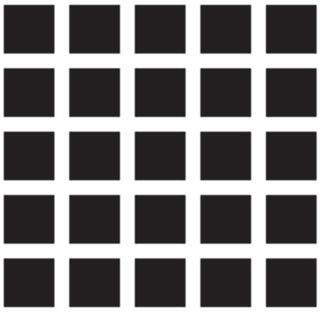
a Que vois-tu ?



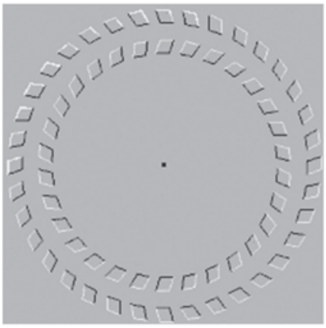


Illusion de Kanizsa

b Qu'aperçois-tu à l'intersection des lignes ? Est-ce réel ? Reproduis ce dessin en prenant 1 cm pour mesure du côté du carré.



c Fixe bien le point au centre de l'image tout en t'approchant et en t'éloignant de la page. Un effet surprenant se produira...



Baingio Pinna

3 Il faut se méfier des évidences !

a ***Petits problèmes***

- Une bouteille d'huile d'olive coute 6 €. L'huile d'olive coute 5 € de plus que la bouteille. Combien coute la bouteille vide ?
- Le prix d'un meuble est diminué de 50 % puis augmenté de 50 %. Quel est alors son prix ? Vérifie en prenant 400 € pour prix de départ.

b Que peux-tu dire à propos du *triangle de Penrose* ci-dessous ?

c Fais des recherches sur les œuvres du dessinateur M.C. Escher, et en particulier sur les lithographies intitulées « *Belvédère* », « *Montée et descente* », « *Mouvement perpétuel* ».
Ces dessins paraissent normaux au premier coup d'œil mais, en y regardant de plus près, que constates-tu ?

4 Instruments ou calculs ?

a Construis un triangle TUC tel que UC = 7 cm, $\widehat{TUC} = 54°$ et $\widehat{TCU} = 35°$.

b En utilisant tes instruments de géométrie, détermine la nature du triangle TUC.

c À l'aide d'un calcul, détermine la mesure de l'angle $\widehat{UTC}$.
Compare avec ce que tu as trouvé à la question **b**.

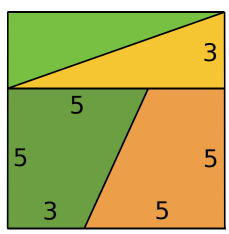
5 Pourquoi démontrer ?

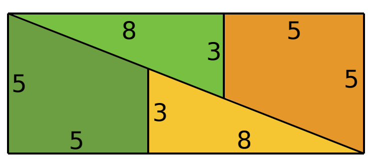
a Construis un carré de 8 cm de côté, puis découpe-le en quatre pièces comme ci-contre.

b Assemble ces quatre pièces comme dans la figure du bas.

Selon toi, est-ce le puzzle d'un rectangle ?

c Calcule l'aire du carré et du rectangle. Conclus.





6 Soyons critiques

Le professeur présente un énoncé mathématique :

« Dans une division euclidienne, le quotient est toujours supérieur au reste. »

Ingrid dit : « Cet énoncé est vrai, ça marche pour tous les exemples que j'ai pris. ».

Stéphane dit : « Cet énoncé est parfois vrai, parfois faux ! C'est vrai pour 16 ÷ 3, mais c'est faux pour 26 ÷ 11. ».

Stella dit : « Cet énoncé est donc faux car il y a un exemple qui ne marche pas. ».

À ton avis, qui a raison et qui a tort ?

7 Si... alors...

a Recopie chacune des propriétés suivantes. Souligne en vert la condition pour l'utiliser, et en rouge ce qu'elle permet de montrer (la conclusion).

- **Si** un nombre est divisible par 9, **alors** il est divisible par 3.
- **Si** un nombre se termine par 0 ou 5, **alors** il est divisible par 5.
- **Si** un nombre entier est impair, **alors** son carré est impair.
- **Si** on ajoute deux nombres opposés, **alors** leur somme est nulle.
- **Si** deux droites sont parallèles à une même troisième, **alors** elles sont parallèles entre elles.
- **Si** un point appartient à la médiatrice d'un segment, **alors** il est équidistant des extrémités de ce segment.
- **Si** un quadrilatère est un parallélogramme, **alors** ses diagonales ont le même milieu.

b Donne un exemple pour chaque propriété numérique et illustre par un dessin chaque propriété géométrique.

8 Un exemple, oui mais...

a Recopie et complète le tableau suivant.

x	0	1	2	3	4	5	10
$2x + 3x$							
$2 + 3x$							
$5x$							

b L'égalité $2 + 3x = 5x$ est-elle vraie pour une valeur de x ?

Cette égalité est-elle vraie pour n'importe quelle valeur de x ?

c L'égalité $2x + 3x = 2 + 3x$ est-elle vraie pour une valeur de x ?

Cette égalité est-elle vraie pour n'importe quelle valeur de x ?

d L'égalité $2x + 3x = 5x$ est-elle vraie pour une valeur de x ?

Cette égalité est-elle vraie pour n'importe quelle valeur de x ?

Les calculs du tableau suffisent-ils pour répondre à cette question ? Pourquoi ?
Que dois-tu utiliser pour y répondre ?

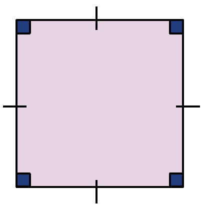
9 Autour du contre-exemple

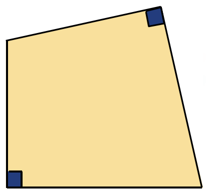
a Voici plusieurs énoncés faux. Pour chacun d'eux, écris ce que doit vérifier un contre-exemple.

- **<u>Si</u>** un quadrilatère a deux côtés parallèles, **<u>alors</u>** c'est un parallélogramme.
- **<u>Si</u>** les diagonales d'un quadrilatère ont la même longueur, **<u>alors</u>** c'est un rectangle.
- Le carré d'un nombre entier est pair.
- L'opposé d'un nombre est négatif.
- **<u>Si</u>** une fraction est inférieure à 1, **<u>alors</u>** son numérateur est supérieur à son dénominateur.

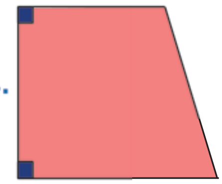
b Quelle(s) figure(s) est(sont) un(des) contre-exemple(s) de l'énoncé suivant ?

<u>Si</u> un quadrilatère a deux angles droits, **<u>alors</u>** c'est un rectangle.

1. 

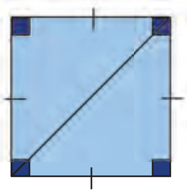
2. 

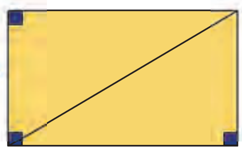
3. 

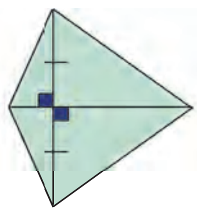
4. 

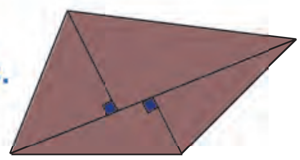
c Quelle(s) figure(s) est(sont) un(des) contre-exemple(s) de l'énoncé suivant ?

Chaque diagonale partage un quadrilatère en deux triangles de même aire.

5. 

6. 

7. 

8. 

d Parmi les propositions ci-dessous, quels sont les contre-exemples de l'énoncé suivant.

<u>Si</u> un nombre est supérieur à 16, **<u>alors</u>** il est supérieur à 18.

• 12,3 • 15 • 16,5 • 17 • 17,9 • 19 • 27

e Modifie les énoncés des questions **a**, **b**, **c** et **d** pour qu'ils soient vrais.

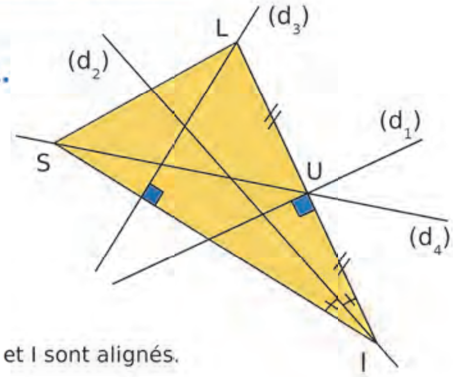
10 Vrai ou faux

Pour chaque énoncé ci-dessous, indique s'il est vrai ou faux. Dans le cas où il est faux, donne un contre-exemple pour justifier ta réponse.

- **<u>Si</u>** deux droites sont parallèles et si une troisième est perpendiculaire à l'une, **<u>alors</u>** elle est perpendiculaire à l'autre.
- **<u>Si</u>** un quadrilatère a deux côtés opposés parallèles et de même longueur, **<u>alors</u>** c'est un parallélogramme.
- **<u>Si</u>** un triangle a deux angles égaux, **<u>alors</u>** il est équilatéral.
- **<u>Si</u>** $3x + 2y = 67$, **<u>alors</u>** $x = 11$ et $y = 17$.
- **<u>Si</u>** $3x + 1 = 7$, **<u>alors</u>** $x = 2$.
- Le carré d'un nombre est toujours positif.

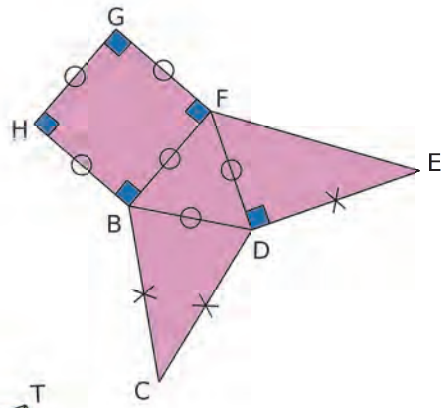
11 Dessins codés

1.

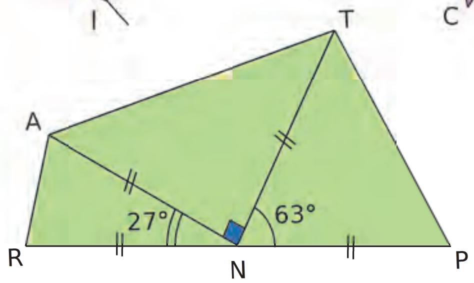


L, U et I sont alignés.

2.



3.



a Pour chaque dessin, indique toutes les informations fournies par le codage.

b Dans le dessin **1**, que représente chaque droite pour le triangle LIS ?
Précise la définition pour chaque réponse.

c Quelles sont les natures des quadrilatères et des triangles particuliers dans le dessin **2** ?
Précise la définition pour chaque réponse.

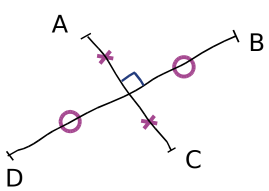
d À propos du dessin **3**, quelle question peut-on poser ?

12 Dessins et propriétés

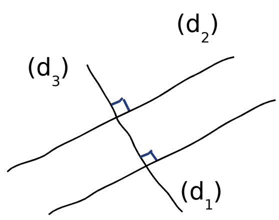
a Pour chacun des dessins codés ci-dessous, énonce une propriété que l'on peut appliquer.

b Que peux-tu en conclure dans chaque cas ?

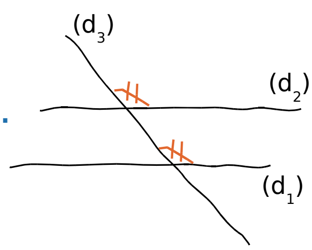
1.



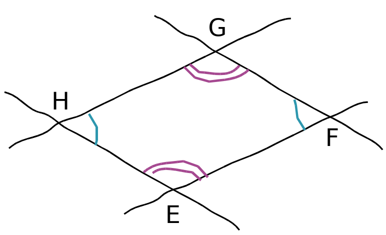
2.



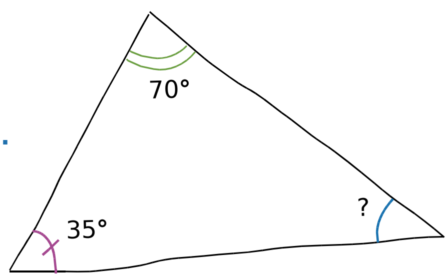
3.



4.



5.



13 Dans la vie courante !

a Voici deux phrases : <u>**S'**</u>il pleut, <u>**alors**</u> il y a des nuages.
<u>**S'**</u>il y a des nuages, <u>**alors**</u> il pleut.

Comment construit-on une phrase à partir de l'autre ?
Que penses-tu de ces deux phrases ?

b De la même façon, transforme les phrases suivantes.

1. <u>**Si**</u> j'ai 10 €, <u>**alors**</u> je peux acheter un livre à 8,50 €.
2. <u>**Si**</u> j'ai 18 ans, <u>**alors**</u> je suis majeur.
3. <u>**Si**</u> c'est un oiseau, <u>**alors**</u> il pond des œufs.
4. <u>**Si**</u> ce n'est pas rouge ou vert, <u>**alors**</u> c'est bleu.
5. <u>**Si**</u> c'est un chien, <u>**alors**</u> il a des plumes.

c Les phrases du **b**, et celles que tu as écrites, sont-elles vraies ou fausses ?

14 Réciproque d'une propriété

a Pour chaque énoncé ci-dessous, dis s'il est vrai ou faux, puis énonce sa réciproque et dis si elle est vraie ou fausse.

1. <u>**Si**</u> un nombre se termine par 3,
<u>**alors**</u> il est divisible par 3.
2. <u>**Si**</u> $x = 3$,
<u>**alors**</u> $x^2 = 9$.
3. <u>**Si**</u> un nombre est divisible par 3,
<u>**alors**</u> il est divisible par 9.
4. <u>**Si**</u> un nombre est pair,
<u>**alors**</u> il se termine par 2.
5. <u>**Si**</u> un quadrilatère a ses diagonales qui se coupent en leur milieu,
<u>**alors**</u> c'est un parallélogramme.
6. <u>**Si**</u> un quadrilatère est un carré,
<u>**alors**</u> il a ses quatre côtés de même longueur.

b Réponds par vrai ou faux aux affirmations suivantes, en justifiant.

7. La réciproque d'un énoncé vrai est toujours vraie.
8. La réciproque d'un énoncé faux est toujours fausse.
9. La réciproque d'un énoncé vrai est toujours fausse.
10. La réciproque d'une énoncé faux est toujours vraie.

c Trouve deux énoncés vrais dont les réciproques sont fausses, et deux énoncés faux dont les réciproques sont vraies.

Activités

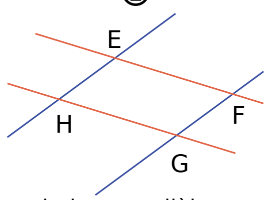
15 Propriété directe ou réciproque ?

Voici cinq propriétés :

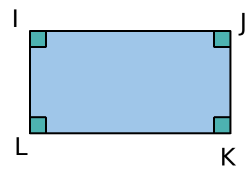
1. **Si** un parallélogramme a deux côtés consécutifs de même longueur, **alors** c'est un losange.
2. **Si** un quadrilatère a quatre angles droits, **alors** c'est un rectangle.
3. **Si** un losange a un angle droit, **alors** c'est un carré.
4. **Si** un losange a ses diagonales de la même longueur, **alors** c'est un carré.
5. **Si** un quadrilatère est un parallélogramme, **alors** ses côtés opposés sont parallèles deux à deux.

Voici les données :

①
ABCD est un losange.

②


Les droites parallèles sont codées de la même couleur.

③


④
MNOP est un losange tel que MO = NP.

a Pour chaque donnée, on ne peut appliquer qu'une des propriétés énoncées ci-dessus, ou la réciproque de l'une d'elles. Dans chaque cas, précise laquelle.

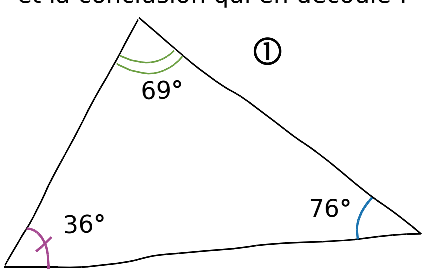
b Donne ensuite la conclusion qui s'en déduit.

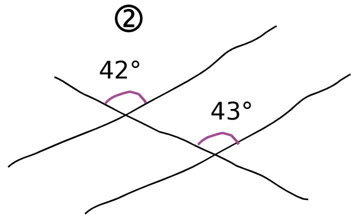
16 Contraposée

a Énonce la négation de la réciproque des énoncés ci-dessous, puis indique, dans chaque cas, si elle est vraie ou fausse. Que remarques-tu alors ?

1. Deux triangles symétriques ont la même aire.
2. **Si** un quadrilatère a ses diagonales qui ne se coupent pas en leur milieu, **alors** c'est un parallélogramme.
3. Deux fractions sont égales si leurs produits en croix sont égaux.
4. La somme de deux nombres opposés est non nulle.

b Dans chaque cas ci-dessous, écris la contraposée d'une propriété que l'on peut appliquer, et la conclusion qui en découle :

①


②


③

2	3	4
3	4	5

N1

18

a.

2 3 8	6
5 8	3 9
4	

b.

6 9 4	8
5 4	8 6
6	

c.

9 8 0	1 2
2 0	8 1
8	

d.

7 0 2	1 9
1 3 2	3 6
1 8	

32 **a.** 210 est-il divisible par 7 ? Et 220 ?

210 est divisible par 7 car 210 = 30 × 7. On en déduit que 217 est multiple de 7, mais pas 220.

b. Trouve tous les nombres divisibles par 7 compris entre 220 et 260.

210 + 14 = 224 est divisible par 7.

Les suivants sont :
224 + 7 = 231 ; 231 + 7 = 238 ; 238 + 7 = 245
245 + 7 = 252 ; 252 + 7 = 259

c. Parmi ces nombres, quels sont ceux qui sont divisibles par 4 ?

224 est divisible par 4 car il se termine par 24.
252 est divisible par 4 car il se termine par 52.

40 **a.** Démontre que si un nombre est divisible par 18, alors il est divisible par 3 et par 6.

Soit n un nombre divisible par 18.
Donc n s'écrit : n = 18 × k, où k est un entier.
Donc n = 3 × 6 × k

n = 3 × (6 × k), donc n est un multiple de 3.
n = 6 × (3 × k), donc n est un multiple de 6.

b. La réciproque est-elle vraie ? Justifie.

La réciproque est fausse.

Par exemple : 6 est divisible par 3 et 6 mais 6 n'est pas divisible par 18.

43 Quels sont les nombres premiers dans la liste suivante ?

12	1	13	21	5	87	37

Les nombres premiers sont 13, 5 et 37.

1 n'est pas premier.

12 n'est pas premier car 12 = 3 × 4
21 n'est pas premier car 21 = 3 × 7
87 n'est pas premier car 87 = 3 × 29

49 Détermine la décomposition en facteurs premiers de chacun des nombres suivants.

a. 96 **c.** 840 **e.** 1 024
b. 97 **d.** 3 150 **f.** 36 × 15

a. $96 = 2^5 \times 3$

b. $97 = 97$

c. $840 = 2^3 \times 3 \times 5 \times 7$

d. $3\,150 = 2 \times 3^2 \times 5^2 \times 7$

e. $1\,024 = 2^{10}$

f. $36 \times 15 = 2^2 \times 3^3 \times 5$

N2

26 Associe les expressions égales.

$(2x + 1)^2$	$-4x^2 - 2x$
$-2x(2x + 1)$	$4x^2 - 2x$
$(2x - 1)^2$	$4x^2 + 4x + 1$
$2x(2x - 1)$	$4x^2 - 4x + 1$

45 Factorise ces expressions.

$U = 4t^2 - 25$

$V = (t + 3)^2 - 16$

$W = (2x + 1)^2 - 25$

$Z = (3i)^2 - (i + 5)^2$

$U = 4t^2 - 25 = (2t + 5)(2t - 5)$

$V = (t + 3)^2 - 16 = (t + 3 + 4)(t + 3 - 4)$
$V = (t + 7)(t - 1)$

$W = (2x + 1)^2 - 25 = (2x + 1 + 5)(2x + 1 - 5)$
$W = (2x + 6)(2x - 4)$

$Z = (3i)^2 - (i + 5)^2 = (3i + (i + 5))(3i - (i + 5))$
$Z = (3i + i + 5)(3i - i - 5) = (4i + 5)(2i - 5)$

56 Le nombre − 2 est-il solution de l'équation $4 - 4x = 6 + x$? Et le nombre 0 ?

Pour $x = -2$

$4 - 4x = 4 - 4 \times (-2) = 4 + 8 = 12$
$6 + x = 6 + (-2) = 4$

− 2 n'est pas solution de l'équation $4 - 4x = 6 + x$.

Pour $x = 0$

$4 - 4x = 4 - 4 \times (0) = 4$
$6 + x = 6 + 0 = 6$

0 n'est pas solution de l'équation $4 - 4x = 6 + x$.

69 Mon père a 23 ans de plus que moi. Dans 15 ans, il aura le triple de l'âge que j'ai aujourd'hui. Quel est mon âge ?

Soit x mon âge.

Mon père a 23 ans de plus que moi. Donc il a : $x + 23$ ans.

Dans 15 ans, il aura le triple de l'âge que j'ai aujourd'hui.
Dans 15 ans, il aura $x + 23 + 15$ ans $= x + 38$ ans.
$x + 38 = 3x$ donc $2x = 38$ et $x = 19$.

Vérification : J'ai 19 ans. Mon père a 42 ans.
Dans 15 ans, il aura 57 ans, soit le triple de l'âge que j'ai aujourd'hui.

78 Soit $A = (y + 5)(y - 2) - 6(y + 5)$.

a. Développe et réduis l'expression A.

$A = (y + 5)(y - 2) - 6(y + 5)$
$A = (y^2 + 3y - 10) - 6y - 30$
$A = y^2 - 3y - 40$

b. Factorise A.

$A = (y + 5)[(y - 2) - 6] = (y + 5)(y - 8)$

c. Résous l'équation $(y + 5)(y - 8) = 0$.

Un produit est nul si l'un des facteurs est nul.

Donc : $y + 5 = 0$ ou $y - 8 = 0$.
Donc : $y = -5$ ou $y = 8$.

Les solutions de cette équation sont -5 et 8.

N3

17 Sachant que $3{,}14 < \pi < 3{,}15$...

a. encadre le nombre -2π ;

On multiplie par un nombre négatif, donc on change le sens des inégalités :

$-2 \times 3{,}14 > -2 \times \pi > -2 \times 3{,}15$
$-6{,}28 > -2\pi > -6{,}30$

b. encadre le nombre $-3\pi + 2$.

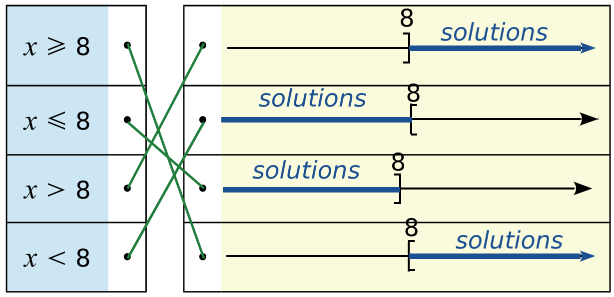
On multiplie par un nombre négatif, donc on change le sens des inégalités :

$-3 \times 3{,}14 > -3 \times \pi > -3 \times 3{,}15$
$-9{,}42 > -3\pi > -9{,}45$

On ajoute 2 (ce qui ne change pas le sens) :

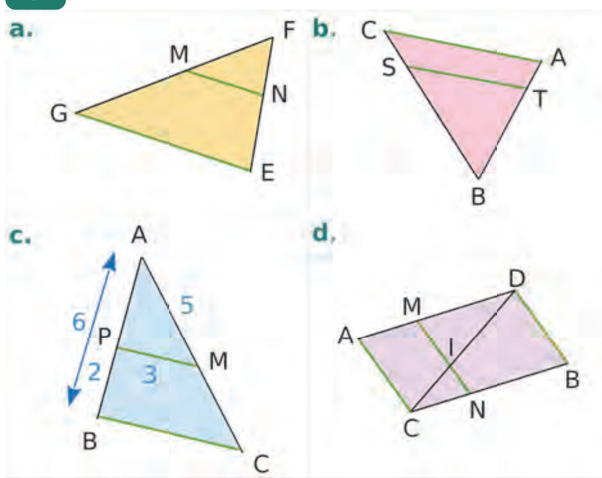
$-9{,}42 + 2 > -3\pi + 2 > -9{,}45 + 2$
$-7{,}42 > -3\pi + 2 > -7{,}45$

23 Associe l'inéquation à ses solutions.



G1

9



a. Dans les triangles FMN et FGE, (MG) et (NE) sont sécantes en F. (MN) et (EG) sont parallèles.
Donc, d'après le théorème de Thalès :
$\frac{FM}{FG} = \frac{FN}{FE} = \frac{MN}{EG}$.

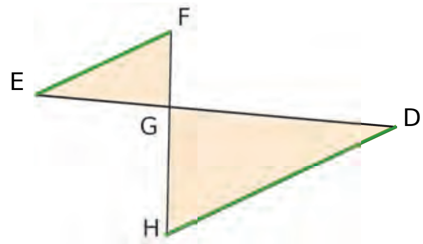
b. Dans les triangles BST et BAC, (CS) et (AT) sont sécantes en B. (ST) et (AC) sont parallèles.
Donc, d'après le théorème de Thalès :
$\frac{BS}{BC} = \frac{BT}{BA} = \frac{ST}{AC}$.

c. Dans les triangles APM et ABC, (PB) et (MC) sont sécantes en A. (PM) et (BC) sont parallèles.
Donc, d'après le théorème de Thalès :
$\frac{AP}{AB} = \frac{AM}{AC} = \frac{PM}{BC}$

d. Dans les triangles ADC et MID, (AM) et (CI) sont sécantes en D. (MI) et (AC) sont parallèles.
Donc, d'après le théorème de Thalès :
$\frac{DM}{DA} = \frac{DI}{DC} = \frac{MI}{AC}$.

Dans les triangles CIN et CBD, (DI) et (BN) sont sécantes en C. (IN) et (DB) sont parallèles.
Donc, d'après le théorème de Thalès :
$\frac{CI}{CD} = \frac{CN}{CB} = \frac{NI}{DB}$.

19 Les points F, G, H sont alignés et les points D, G, E également. Les droites en vert sont parallèles.



On sait que : GH = 15 cm ; GF = 6 cm ; GD = 14,2 cm et HD = 7,3 cm.

Calcule les longueurs EF et EG.

Les droites (DE) et (FH) sont sécantes en G.
Les droites (EF) et (HD) sont parallèles.
Donc, d'après le théorème de Thalès, on a :

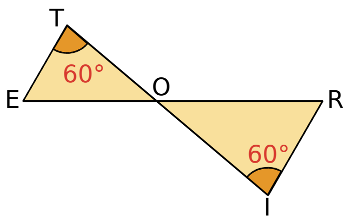
$\frac{GD}{EG} = \frac{GH}{GF} = \frac{DH}{EF}$.

Donc $\frac{14{,}2}{EG} = \frac{15}{6} = \frac{7{,}3}{EF}$.

D'où EG $= \frac{6 \times 14{,}2}{15} = 5{,}68$ cm.

Et EF $= \frac{6 \times 7{,}3}{15} = 2{,}92$ cm.

34 Les points T, O, I sont alignés, ainsi que les points R, O, E. On donne : ET = 2,4 cm ; OT = 6,4 cm ; OR = 7 cm et RI = 3 cm.



Calcule, en justifiant, les longueurs OE, OI et ER.

Les droites (TI) et (RE) sont sécantes en O.
Les angles $\widehat{ETO}$ et $\widehat{RIO}$ sont alternes-internes et égaux, donc les droites (ET) et (RI) sont parallèles.

Donc, d'après le théorème de Thalès, on a :

$\frac{RO}{OE} = \frac{OI}{OT} = \frac{RI}{ET}$

Donc $\frac{7}{OE} = \frac{OI}{6{,}4} = \frac{3}{2{,}4}$.

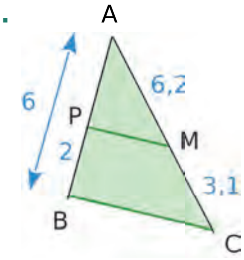
D'où OE $= \frac{7 \times 2{,}4}{3} = 5{,}6$ cm

et OI $= \frac{3 \times 6{,}4}{2{,}4} = 8$ cm.

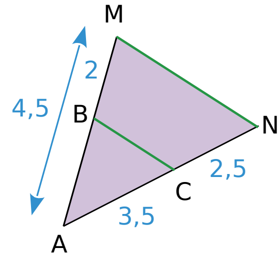
On en déduit que :
ER = EO + OR = 5,6 + 7 = 12,6 cm.

42 Les droites vertes sont-elles parallèles ? Justifie.

a.



b.



a. Les points A,P et B d'une part et A, M et C d'autre part sont alignés dans le même ordre.

On calcule les quotients.

D'une part, $\frac{AP}{AB} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

D'autre part, $\frac{AM}{AC} = \frac{6{,}2}{9{,}3} = \frac{2}{3}$.

On constate que $\frac{AP}{AB} = \frac{AM}{AC}$.

Donc, d'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (PM) et (BC) sont parallèles.

b. Les points A,B et M d'une part, et A, C et N d'autre part, sont alignés dans le même ordre.

On calcule les quotients.

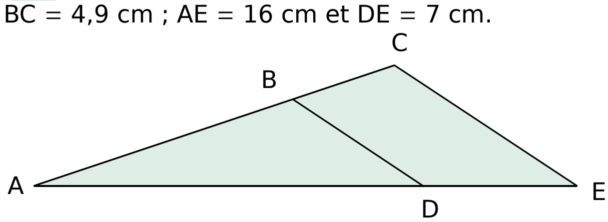
D'une part, $\frac{AB}{AM} = \frac{2{,}5}{4{,}5}$ D'autre part, $\frac{AC}{AN} = \frac{3{,}5}{6}$

2,5 × 6 = 15 et 3,5 × 4,5 = 15,75.
Les produits en croix ne sont pas égaux,

donc $\frac{AP}{AB} \neq \frac{AM}{AC}$.

Donc, d'après le théorème de Thalès, les droites (BC) et (MN) ne sont pas parallèles.

49 D ∈ [AE] ; B ∈ [AC] ; AB = 6,3 cm ; BC = 4,9 cm ; AE = 16 cm et DE = 7 cm.



Les droites (BD) et (CE) sont-elles parallèles ? Justifie ta réponse.

Les points A, B, C d'une part, et A, D, E d'autre part sont alignés dans le même ordre.

D'une part, $\frac{AB}{AC} = \frac{6{,}3}{6{,}3+4{,}9} = \frac{6{,}3}{11{,}2} = \frac{63}{112} = \frac{9}{16}$.

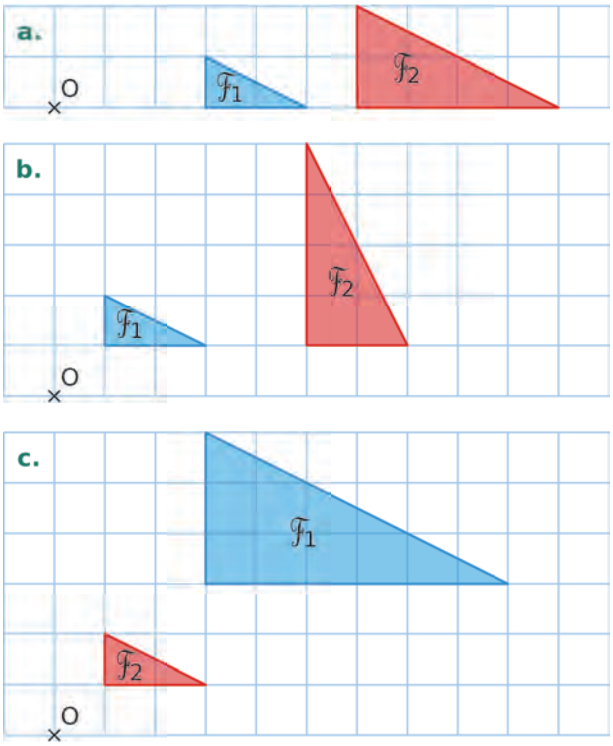
D'autre part, $\frac{AD}{AE} = \frac{16-7}{16} = \frac{9}{16}$.

On constate que $\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE}$.

Donc, d'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (BD) et (CE) sont parallèles.

G2

7 Dans chaque cas, indique si la figure $\mathcal{F}_2$ est l'image de la figure $\mathcal{F}_1$ par une homothétie de centre O. Si oui, précise son rapport.

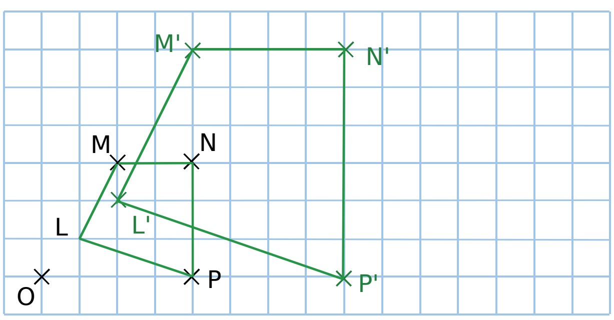


a. $\mathcal{F}_2$ est l'image de $\mathcal{F}_1$ par l'homothétie de centre O et de rapport 2.

b. $\mathcal{F}_2$ n'est pas l'image de $\mathcal{F}_1$ par une homothétie.

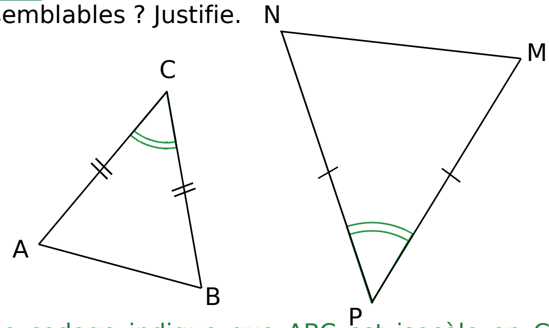
c. $\mathcal{F}_2$ est l'image de $\mathcal{F}_1$ par l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{3}$.

19 Reproduis le quadrilatère suivant.



Construis l'image L'M'N'P' de ce quadrilatère par l'homothétie de centre O et de rapport 2.

29 Les triangles ABC et MNP suivants sont-ils semblables ? Justifie.



Le codage indique que ABC est isocèle en C, et MNP est isocèle en P.
Par ailleurs, les angles $\widehat{ACB}$ et $\widehat{MPN}$ sont égaux. On en déduit que les triangles ABC et MNP ont leurs angles égaux deux à deux : ils sont donc semblables.

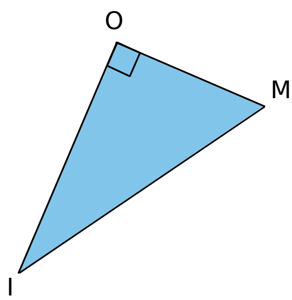
G3

12 BON est un triangle rectangle en O.

Nomme son hypoténuse, le côté opposé à l'angle $\widehat{BNO}$ et le côté adjacent à l'angle $\widehat{BNO}$.

Son hypoténuse est le segment [BN].
Le côté opposé à l'angle $\widehat{BNO}$ est le segment [BO].
Le côté adjacent à l'angle $\widehat{BNO}$ est le segment [NO].

17 MOI est un triangle rectangle en O.



Que calcules-tu lorsque tu écris :

a. $\frac{OI}{MI}$? **b.** $\frac{OI}{MO}$?

c. $\frac{MO}{OI}$? **d.** $\frac{MO}{MI}$?

a. $\frac{OI}{MI}$ ÷ cos($\widehat{OIM}$) ou sin($\widehat{OMI}$)

b. $\frac{OI}{MO}$ ÷ tan($\widehat{OMI}$) **c.** $\frac{MO}{OI}$ ÷ tan($\widehat{OIM}$)

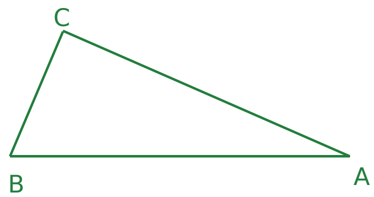
d. $\frac{MO}{MI}$ ÷ cos($\widehat{OMI}$) ou sin($\widehat{OIM}$)

33 Construis un triangle ABC tel que : AB = 4,5 cm, $\widehat{BAC}$ = 23° et $\widehat{CBA}$ = 67°.

a. Ce triangle est-il rectangle ? Pourquoi ?

b. Calcule AC et BC. Arrondis au dixième.

a.



b. $\widehat{BAC} + \widehat{CBA}$ = 23° + 67° = 90°.

Un triangle ayant deux angles complémentaires est un triangle rectangle (car la somme des angles d'un triangle est égale à 180°).

c. Dans le triangle ABC rectangle en A :

$\cos \widehat{BAC} = \frac{CA}{AB}$, donc AC = 4,5 × cos 23° ≈ 4,1 cm

$\cos \widehat{CBA} = \frac{CB}{AB}$, donc CB = 4,5 × cos 67° ≈ 1,8 cm

38 UVB est un triangle rectangle en B tel que BV = 2 cm et UV = 3,5 cm.

Calcule la mesure arrondie au degré de chacun des angles de ce triangle.

Dans le triangle UVB rectangle en B :

$\cos \widehat{BVU} = \frac{BV}{UV} = \frac{2}{3,5}$, donc $\widehat{BVU}$ ≈ 55°

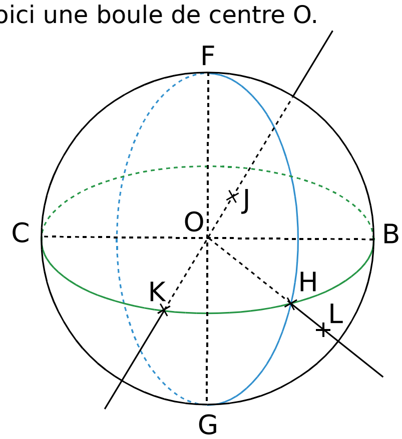
$\widehat{BVU}$ et $\widehat{BUV}$ sont complémentaires, donc :

$\widehat{BUV}$ ≈ 35°

$\widehat{UBV}$ = 90° (UVB est un triangle rectangle en B)

G4

9 Voici une boule de centre O.



a. Les points F, C, G, B, K et H appartiennent à la sphère de centre O, passant par F.

b. OF = OC = OG = OB = OK = OH et FG = CB

21 Le Soleil est assimilé à une boule de 1 392 000 km de diamètre.

a. Calcule la surface du Soleil. Donne la réponse en notation scientifique.

Le rayon du Soleil est :
1 392 000 : 2 = 696 000 km.

La surface d'une sphère est donnée par la formule : A = 4 × π × *rayon*²

A = 4 × π × 696 000²
A = $6{,}09 \times 10^{12}$ km²

b. Calcule le volume du Soleil. Donne la réponse en notation scientifique.

Le volume d'une sphère est donné par la formule : $V = \frac{4}{3} \times \pi \times rayon^3$

$V = \frac{4}{3} \times \pi \times 696\,000^3$

V ≈ $1{,}41 \times 10^{18}$ km³

c. Sachant que la Terre a un rayon de 6 378 km, calcule son volume et donne la réponse en notation scientifique.

Le volume d'une sphère est donné par la formule : $V = \frac{4}{3} \times \pi \times rayon^3$

$V = \frac{4}{3} \times \pi \times 6\,378^3$

V ≈ $1{,}09 \times 10^{12}$ km³

d. Combien de fois le Soleil est-il plus volumineux que la Terre ?

$$\frac{\textit{Volume du Soleil}}{\textit{Volume de la Terre}} = \frac{1{,}41 \times 10^{18}}{1{,}09 \times 10^{12}} \approx 1{,}3 \times 10^6$$

Le Soleil est environ 10^6 fois plus volumineux que la Terre.

D1

13 Traduis chacune des phrases suivantes par une correspondance de la forme $x \longmapsto$ ...

a. Pour calculer l'image d'un nombre x, on le multiplie par 2, puis on ajoute 3 au résultat.

$x \longmapsto 2x + 3$

b. Pour calculer l'image d'un nombre x, on calcule son carré, puis on soustrait 4 au résultat.

$x \longmapsto x^2 - 4$

c. Pour calculer l'image d'un nombre x non nul, on multiplie l'inverse de ce nombre par − 9.

$x \longmapsto \frac{-9}{x}$

31 Soit la fonction f qui, à tout nombre entier, associe le plus petit nombre premier, supérieur ou égal à ce nombre entier.

a. Explique pourquoi $f(8) = 11$.

8, 9 et 10 ne sont pas des nombres premiers, donc le plus petit nombre premier, supérieur ou égal à 8, est 11. Donc : $f(8) = 11$.

b. Quels sont les antécédents de 29 par f ?

29 est un nombre premier, donc $f(29) = 29$.
24, 25, 26, 27, 28 ne sont pas des nombres premiers (mais 23 est un nombre premier).
Donc les antécédents de 29 par f sont :
24, 25, 26, 27, 28 et 29.

39 Construis le tableau de valeurs de la fonction g définie par $g(x) = -3x^2 + 4$ pour les valeurs entières de x comprises entre -6 et 6.

x	-6	-5	-4	-3	-2	-1
$g(x)$	-104	-71	-44	-23	-8	1

x	0	1	2	3	4	5	6
$g(x)$	4	1	-8	-23	-44	-71	-104

47 La fonction k est définie par $k(x) = 4x - 3$.

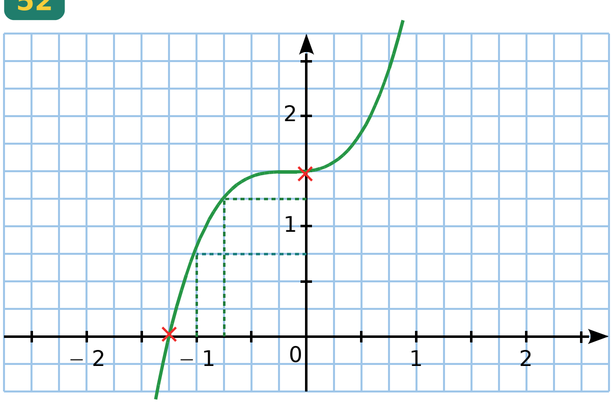
a. Quelle est l'image de $-0,5$ par k ?

$k(-0,5) = \underline{4 \times (-0,5)} - 3$
$k(-0,5) = (-2) - 3$
$k(-0,5) = -5$
donc -5 est l'image de $-0,5$ par k.

b. Quel nombre a pour antécédent 1 par k ?

$k(x) = 4x - 3 = 1$, donc $4x - 3 + 3 = 1 + 3$
$4x = 4$ donc $x = 1$.
1 a pour antécédent 1 par k.

52



x	$-1,25$	0	-1	$-0,75$
$k(x)$	0	1,5	0,75	1,25

D2

8 Parmi les fonctions f, g, h et k définies ci-dessous, indique celles qui sont affines.

a. $f(x) = 5 + 2x$
b. $g(x) = 3x - 4$
c. $h(x) = x^2$
d. $k(x) = (5 - 2x) - 10$

f est affine car son expression est de la forme ax + b avec a = 2 et b = 5.

g est affine car son expression est de la forme ax + b avec a = 3 et b = -4.

h n'est pas affine.

$k(x) = (5 - 2x) - 10 = -2x - 5$.
k est affine car son expression est de la forme ax + b avec a = -2 et b = -5.

19 Soit m la fonction linéaire telle que $m(5) = -35$. Donne l'expression de $m(x)$. Justifie.

m est une fonction linéaire. Elle est donc de la forme $m(x) = $ ax, où a est un nombre fixé.

$m(5) = -35$ et $m(5) = 5$a.
On résout l'équation : $-35 = 5$a
Donc a = -7 et $m(x) = -7x$

24 k est définie par $k : x \longmapsto 2x - 5$.

a. Calcule l'image de 0 puis celle de 1.

b. Calcule $k(-4)$ et $k\left(\frac{1}{4}\right)$.

c. Résous l'équation $k(x) = 0$. Que peux-tu dire de la solution de cette équation ?

d. Calcule l'antécédent de 1, puis celui de 15.

a. $k(0) = 2 \times 0 - 5 = -5$
$k(1) = 2 \times 1 - 5 = 2 - 5 = -3$

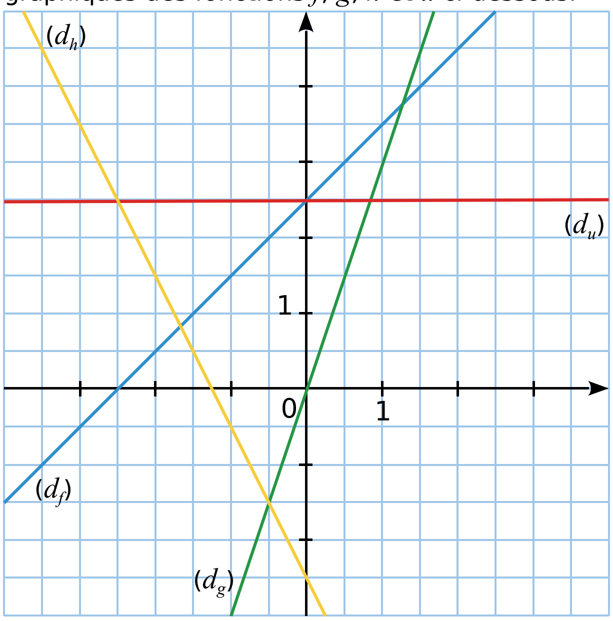
b. $k(-4) = 2 \times (-4) - 5 = -8 - 5 = -13$
$k(\frac{1}{4}) = 2 \times \frac{1}{4} - 5 = \frac{1}{2} - 5 = -4,5$

c. $k(x) = 0$ donc $2x - 5 = 0$
$2x - 5 + 5 = 0 + 5$ donc $2x = 5$
$x = 2,5$ donc 2,5 est l'antécédent de 0 par k.

d. $k(x) = 1$ donc $2x - 5 = 1$
$2x - 5 + 5 = 1 + 5$ donc $2x = 6$
$x = 3$ donc 3 est l'antécédent de 1 par k.

$k(x) = 1,5$ donc $2x - 5 = 1,5$
$2x - 5 + 5 = 1,5 + 5$ donc $2x = 6,5$
$x = 3,25$ donc 3,25 est l'antécédent de 1,5 par k.

32 On considère les représentations graphiques des fonctions f, g, h et u ci-dessous.



a. Parmi les fonctions affines f, g, h et u :

- laquelle est linéaire ? g
- laquelle est constante ? u
- lesquelles ont un coefficient directeur :
  positif ? f, g
  négatif ? h
  nul ? u

b. Le coefficient directeur de f est : 1
Le coefficient directeur de g est : 3
Le coefficient directeur de h est : -2
Le coefficient directeur de u est : 0

c. L' ordonnée à l'origine de f est : 2,5
L' ordonnée à l'origine de g est : 0
L' ordonnée à l'origine de h est : $-2,5$
L' ordonnée à l'origine de u est : 2,5

d. Déduis-en l'expression de chaque fonction.

$f(x) = x + 2,5$; $g(x) = 3x$
$h(x) = -2x - 2,5$; $u(x) = 2,5$

53 Le prix hebdomadaire de la location d'un bateau à moteur dépend de la période. Il est de 882 € en saison basse, et majoré de 27 % en pleine saison.

Calcule le prix de la location d'un bateau à moteur pour une semaine en pleine saison.

$882 \times 1,27 = 1\,120,14$

Le prix de la location d'un bateau à moteur pour une semaine en pleine saison est de 1 120,14 €.

64 La vitesse commerciale d'un TGV est en moyenne de 300 km/h.

a. Combien de kilomètres parcourt-il en 10 min ?

Il parcourt 300 km en 60 minutes, donc 50 km en 10 minutes (6 fois moins).

b. Calcule sa vitesse moyenne en km/min.

300 km/h = 300 km/60 min = 5 km/min

c. Calcule cette vitesse en m/s. Tu arrondiras le résultat à l'unité.

5 km/min = 5000 m/60 s ≈ 83 m/s

D3

8 Un professeur d'EPS a organisé un concours de lancer de javelot. Voici les distances atteintes (en mètres) par ses 21 élèves de 3ᵉ :

9,1	6,5	9,8	13,6	11,9	14,5	8
11	13,1	13,7	8,7	6,1	11,9	10
9,1	8,3	8	12,1	13,7	9,4	8,1

a. Combien d'élèves ont lancé à 12 mètres ou plus ?

6 élèves ont lancé à 12 mètres ou plus.

b. Combien d'élèves ont lancé à 8,9 mètres ou moins ?

7 élèves ont lancé à 8,9 mètres ou moins.

c. Recopie et complète le tableau suivant.

Performance	De 6 m à 8,9 m	De 9 m à 11,9 m	De 12 m à 14,9 m
Nombre de lancers	7	8	6

d. Combien d'élèves ont lancé à 9 mètres ou plus ?

8 + 6 = 14 élèves ont lancé à 9 mètres ou plus.

12 Le tableau suivant donne la répartition des notes des élèves de 3ᵉ3 au dernier DS de biologie. Détermine une approximation de la moyenne de la classe à ce DS.

Classe	[0 ; 4[	[4 ; 8[	[8 ; 12[	[12 ; 16[	[16 ; 20[
Effectif	3	5	9	7	4

Centre	2	6	10	14	18
Effectif	3	5	9	7	4

M = (2×6 + 6×5 + 10×9 + 14×7 + 18×4) : 28
M = (12 + 30 + 90 + 98 + 72) : 28
M = 302 : 28 ≈ 10,8

11 est une approximation de la moyenne à ce DS.

D4

8 On lance un dé, bien équilibré, à six faces numérotées :

2 4 6 8 10 12

a. Quelle probabilité a le dé de tomber sur le 4 ?

Le dé étant équilibré, chacune des six faces a autant de chance de sortir qu'une autre.

La probabilité de tomber sur le 4 est donc de $\frac{1}{6}$.

b. Quelle probabilité a le dé de tomber sur un nombre à deux chiffres ?

Il y a deux issues sur les 6 qui correspondent à un nombre à 2 chiffres. Donc la probabilité que le dé tombe sur un nombre à deux chiffres est de $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

c. Y a-t-il plus de chance que le dé tombe sur un multiple de 3 ou sur un multiple de 4 ?

Parmi les issues possibles, il y a 3 multiples de 4 (4, 8 et 12) et 2 multiples de 3 (6 et 12).
Il y a donc plus de chance que le dé tombe sur un multiple de 4 que sur un multiple de 3.

d. Que dire de l'évènement : « *Le dé tombe sur un nombre impair.* » ?

Cet évènement est impossible.

e. Énonce, dans le cadre de cette expérience aléatoire, un évènement certain.

Par exemple : « Le dé tombe sur un nombre pair. » ou « Le dé tombe sur un nombre inférieur à 13. », etc.

13 On tire une carte dans un jeu ordinaire de cinquante-deux cartes.

Donne les probabilités des évènements suivants.

a. « *Obtenir un carreau.* »

Sur les 52 cartes du jeu, il y a 13 cartes « carreau », et chaque carte a autant de chances d'être choisie qu'une autre. Donc la probabilité d'obtenir un carreau est de $\frac{13}{52}$, soit $\frac{1}{4}$.

b. « *Obtenir un valet.* »

Il y a 4 valets sur un total de 52 cartes, donc la probabilité d'obtenir un valet est de $\frac{4}{52} = \frac{1}{13}$.

c. « *Obtenir un valet de carreau.* »

Il y a un unique valet de carreau sur un total de 52 cartes donc la probabilité d'obtenir un valet de carreau est de $\frac{1}{52}$.

d. On ajoute deux jokers à ce jeu. Les probabilités précédentes vont-elles augmenter ?

Les probabilités vont toutes diminuer car on augmente le nombre total de cartes, sans augmenter les cartes concernées (« carreau » ou « valet »).

Les fractions auront donc le même numérateur, mais un dénominateur plus grand : elles seront donc plus petites.

27 ***Digicode***

Un digicode commande l'ouverture de la porte du garage à vélo du collège. Le code d'ouverture est composé d'une lettre parmi **A**, **B** ou **C**, suivie d'un chiffre parmi **1**, **2** ou **3**.

a. Quels sont les différents codes possibles ?

Il y a 9 codes possibles :
A1 – A2 – A3 – B1 – B2 – B3 – C1 – C2 – C3

Alice compose au hasard le code **A1**.

b. Quelle est la probabilité que son code ouvre la porte du garage à vélo ?

La probabilité que son code ouvre la porte du garage à vélo est de $\frac{1}{9}$.

c. On informe Alice qu'en tapant **A1**, elle s'est trompée à la fois de lettre et de chiffre. Quelle probabilité a-t-elle de trouver le bon code lors du deuxième essai ?

Comme elle s'est trompée de lettre et de chiffre, il ne reste que 4 possibilités : B2 – B3 – C2 – C3.

La probabilité demandée est donc de $\frac{1}{4}$.

d. Son deuxième essai n'a toujours pas ouvert la porte mais cette fois Alice ne s'est trompée que de lettre. Explique pourquoi, à présent, elle est sûre de trouver le bon code lors d'une troisième tentative.

Il ne restait que 4 possibilités : B2 – B3 – C2 – C3.

Comme elle ne s'est trompée que de lettre, c'est donc qu'elle a tapé le bon chiffre.

Elle va donc choisir le code avec l'autre lettre, mais avec le même chiffre : il ne reste plus qu'une seule possibilité !

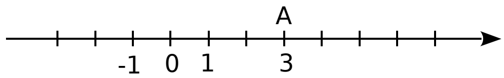
Elle est donc certaine d'ouvrir la porte à la prochaine tentative.

LEXIQUE · L'essentiel des notions

A

Abscisse (sur un axe)

Sur une droite graduée d'origine O, tout point A peut être repéré par un nombre relatif appelé son abscisse.



Ici, l'abscisse du point A est 3. On note A(3).

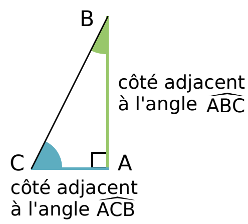
Abscisse (dans un repère)

L'abscisse d'un point dans un repère est la première coordonnée de ce point.

L'abscisse du point A(3 ; − 2) est 3.

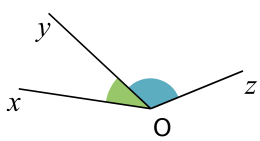
Adjacent (côté)

Dans un triangle rectangle, le côté adjacent à un angle aigu est le côté de cet angle qui n'est pas l'hypoténuse.



Adjacents (angles)

Deux angles adjacents sont deux angles qui ont leur sommet en commun, un côté commun et qui sont situés de part et d'autre de ce côté commun.



Affine (fonction)

Une fonction affine est une fonction qui, à un nombre x, associe le nombre $ax + b$ (a et b sont des nombres fixés).

Aire

L'aire d'une figure est la mesure de la surface occupée par cette figure, dans une unité donnée.

Altitude

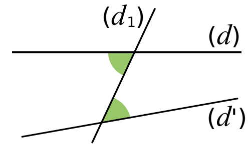
Pour un point repéré dans l'espace, l'altitude est la troisième coordonnée, encore appelée cote.

Algorithme

Un algorithme est une séquence finie d'instructions permettant de résoudre un problème donné.

Alternes-internes (angles)

Les angles verts sont alternes-internes.
Ils sont déterminés par les droites (d), (d') et la sécante (d_1).

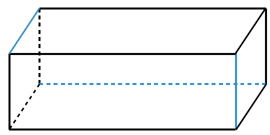


Antécédent

Si le nombre 2 a pour **image** 3 par la fonction f, alors on dit que 3 est un antécédent de 2 par f.

Arête

Pour un solide à faces planes, une arête est un des côtés d'une face de ce solide.

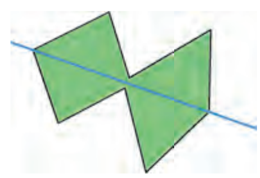


Arrondi

L'arrondi d'un nombre est la valeur approchée la plus proche de ce nombre à une précision donnée.

Axe de symétrie d'une figure

Un axe de symétrie d'une figure est une droite qui partage la figure en deux parties superposables par pliage le long de cette droite.



B

Bissectrice

La bissectrice d'un angle est la demi-droite qui partage cet angle en deux angles adjacents de même mesure.

C'est l'axe de symétrie de l'angle.

C

Caractère quantitatif

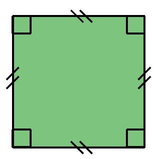
Un caractère est quantitatif lorsqu'on peut le mesurer et exprimer ses valeurs sous forme de nombres. Par exemple : une taille, une durée, une température.

Caractère qualitatif

Un caractère est qualitatif lorsqu'on ne peut pas le mesurer. Par exemple : la couleur des yeux, le film préféré, le département d'origine.

Carré (figure)

Un carré est un quadrilatère avec quatre côtés de même longueur et quatre angles droits.
C'est donc à la fois un losange et un rectangle.



Carré (d'un nombre)

Le carré d'un nombre est ce nombre multiplié par lui-même.

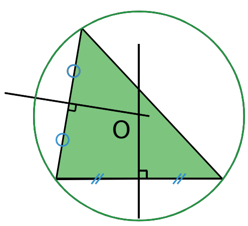
Le carré de 9 se note : $9^2 = 81$.

Cercle

Un cercle est formé de tous les points situés à la même distance d'un point donné (le **centre** du cercle). Cette distance est le **rayon** du cercle.
Le cercle de centre O et de rayon r est formé de tous les points situés à r unités du point O.

Cercle circonscrit

Le cercle circonscrit à un triangle est le cercle qui passe par les trois sommets de ce triangle.
Son centre est le point de concours des médiatrices du triangle.

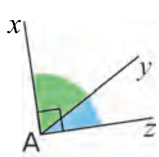


Circonférence

La circonférence d'un cercle est la longueur de ce cercle.

Complémentaires (angles)

Deux angles complémentaires sont deux angles dont la somme des mesures est égale à 90°.

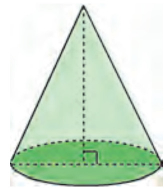


Concourantes (droites)

Des droites concourantes sont des droites qui se coupent en un même point.

Cône de révolution

Un cône de révolution est un solide qui est généré par un triangle rectangle tournant autour d'un des côtés de son angle droit.
La base du cône de révolution est un disque.

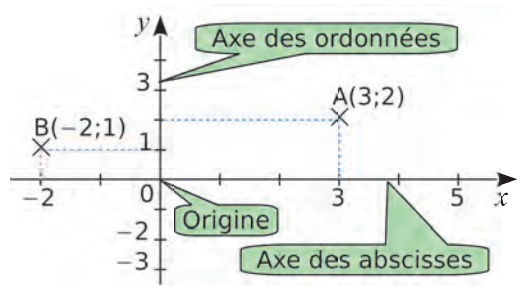


Conjecture

Émettre une conjecture, c'est résumer, dans un énoncé court et précis, une idée que l'on pense être vraie mais qui n'a pas encore été démontrée. Après démonstration, la conjecture devient propriété.

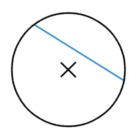
Coordonnées (d'un point)

Dans un plan muni d'un repère, tout point est repéré par un couple de nombres relatifs, appelé ses coordonnées : la première est l'abscisse et la seconde est l'ordonnée.



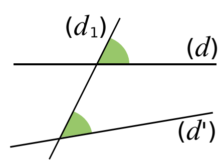
Corde

Une corde est un segment qui joint deux points d'un cercle.



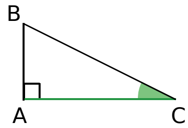
Correspondants (angles)

Les angles verts sont correspondants.
Ils sont déterminés par les droites (d), (d') et la sécante (d_1).



Cosinus (d'un angle aigu)

Dans un triangle rectangle, le cosinus d'un angle aigu est le quotient de la longueur du côté adjacent à cet angle par la longueur de l'hypoténuse.



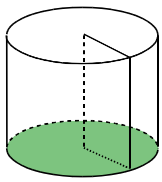
$$\text{cosinus } \widehat{ACB} = \frac{\text{côté adjacent à l'angle } \widehat{ACB}}{\text{hypoténuse}} = \frac{CA}{CB}$$

Croissant (ordre)

Ranger des nombres dans l'ordre croissant signifie les ranger du plus petit au plus grand.

Cylindre (de révolution)

Un cylindre de révolution est un solide engendré par la rotation d'un rectangle autour d'un de ses côtés. Ses bases sont deux disques identiques.



D

Décroissant (ordre)

Ranger des nombres dans l'ordre décroissant signifie les ranger du plus grand au plus petit.

Dénominateur

Dans une écriture fractionnaire, le dénominateur est le nombre situé en-dessous du trait de fraction.

Par exemple, 5 est le dénominateur de $\frac{4}{5}$.

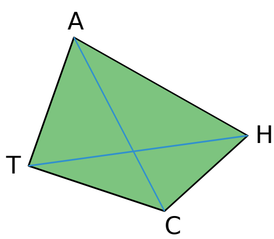
Développer

Développer une expression, c'est transformer un produit en une somme algébrique.

Diagonale

Une diagonale est un segment qui joint deux sommets non consécutifs d'un polygone.

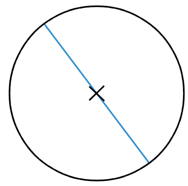
[AC] et [TH] sont les diagonales du polygone CHAT.



Diamètre

Un diamètre d'un cercle est une corde qui passe par le centre de ce cercle.

Le diamètre d'un cercle est la longueur des cordes qui passent par le centre de ce cercle.



Différence

Une différence est le résultat d'une soustraction.

Distance à zéro

La distance à zéro d'un nombre relatif est la distance entre ce nombre et zéro, sur une droite graduée.

La distance à zéro de -3 et $+3$ est 3.

Dividende (dans une division)

Dans une division euclidienne, le dividende est le nombre qu'on divise.

Diviseur (dans une division)

Dans une division euclidienne, le diviseur est le nombre par lequel on divise.

Diviseur (d'un nombre)

Soient a et b deux nombres entiers non nuls.
On dit que b est un diviseur de a si le reste de la division euclidienne de a par b est nul.

Divisible

On dit que a est divisible par b si b est un diviseur de a.

Division euclidienne

Effectuer la division euclidienne de deux nombres entiers, c'est trouver deux nombres entiers (le quotient et le reste) tels que :

- dividende $=$ diviseur $\times$ quotient $+$ reste ;
- reste $<$ diviseur.

E

Échelle

Une représentation est dite « à l'échelle » lorsque les dimensions sur le plan sont proportionnelles aux dimensions réelles. L'échelle est le coefficient de proportionnalité, c'est-à-dire le quotient : $\dfrac{\text{dimensions sur le plan}}{\text{dimensions réelles}}$.

(Les dimensions sont dans la même unité.)

Effectif

L'effectif d'une valeur est le nombre de données d'une série qui ont cette valeur.

Équilatéral (triangle)

Un triangle équilatéral est un triangle dont les trois côtés ont la même mesure.

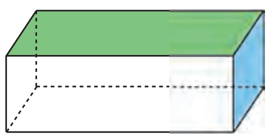
Étendue

L'étendue d'une série statistique est la différence entre la plus grande valeur et la plus petite valeur prises par le caractère de la série.

F

Face

Une face d'un solide est l'un des polygones qui délimitent ce solide.



Facteur

Les facteurs sont les nombres multipliés dans un produit.

Dans le produit 4×5, les facteurs sont 4 et 5.

Factoriser

Factoriser une expression, c'est transformer une somme algébrique en un produit.

Fréquence

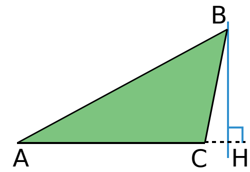
La fréquence d'une valeur d'un caractère est le quotient de l'effectif de cette valeur par l'effectif total.

$$\text{fréquence} = \frac{\text{effectif de la valeur}}{\text{effectif total de la série}}$$

H

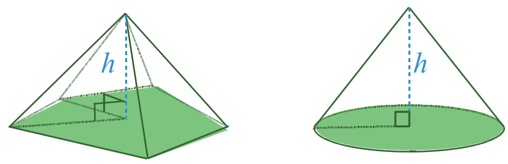
Hauteur d'un triangle

Dans un triangle, une hauteur est une droite qui passe par un sommet du triangle et qui est perpendiculaire au côté opposé à ce sommet.



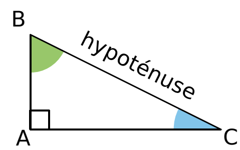
Hauteur (d'une pyramide, d'un cône)

La hauteur d'une pyramide ou d'un cône est le segment issu de son sommet et perpendiculaire au plan de la base.



Hypoténuse

Dans un triangle rectangle, l'hypoténuse est le côté opposé à l'angle droit. C'est aussi le plus grand côté.



I

Image

L'image d'un nombre par une fonction est le nombre résultat de la transformation par cette fonction.

Inférieur

On dit que a est inférieur à b (on note $a < b$) lorsque a est plus petit que b.

Inverse

L'inverse d'un nombre relatif a ($a \neq 0$) est le nombre qui, multiplié par a, donne 1.

On le note a^{-1}, c'est-à-dire $a^{-1} = \dfrac{1}{a}$.

Isocèle (triangle)

Un triangle isocèle est un triangle dont deux côtés ont la même mesure.

Isométriques (triangles)

Deux triangles sont isométriques si leurs côtés ont la même longueur deux à deux.

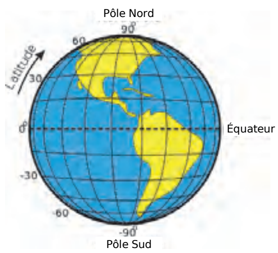
Irréductible (fraction)

Une fraction irréductible est une fraction que l'on ne peut plus simplifier.

L

Latitude

La latitude d'un point sur la Terre correspond à la distance angulaire, exprimée en degrés, qui sépare ce point de l'équateur. Les latitudes se comptent de $-90°$ à $+90°$ et la latitude de l'équateur est $0°$.

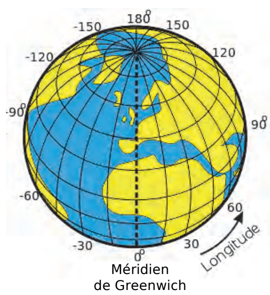


Linéaire (fonction)

Une fonction linéaire est une fonction qui, à un nombre x, associe le nombre ax (a est un nombre fixé).

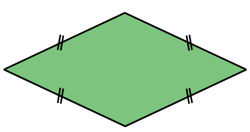
Longitude

La longitude d'un point sur la Terre correspond à l'angle formé par le méridien de ce point avec le méridien de Greenwich, exprimé en degrés. Les longitudes se comptent de $0°$ à $180°$ vers l'ouest et de $0°$ à $-180°$ vers l'est.



Losange

Un losange est un quadrilatère qui a quatre côtés de même longueur.



M

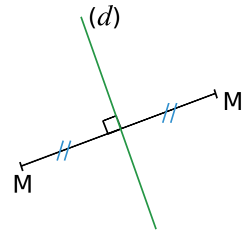
Médiane (d'une série statistique)

La médiane d'une série statistique ordonnée est une valeur qui partage la série en deux groupes de même effectif.

Médiatrice

La médiatrice d'un segment est la droite perpendiculaire à ce segment en son milieu.

C'est un axe de symétrie de ce segment.



Moyenne

Pour calculer la moyenne d'une série statistique :

- on additionne toutes les valeurs du caractère de la série ;
- on divise la somme obtenue par le nombre de valeurs de la série.

Multiple

Soient a et b deux nombres entiers non nuls.
On dit que b est un multiple de a si b peut s'écrire k $\times$ a, où k est un nombre entier.

N

Numérateur

Dans une écriture fractionnaire, le numérateur est le nombre situé au-dessus du trait de fraction.

Par exemple, 4 est le numérateur de $\frac{4}{5}$.

O

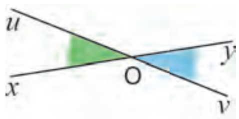
Opposé (d'un nombre)

L'opposé d'un nombre relatif est le nombre qui a la même distance à zéro que ce nombre, et qui est de signe contraire.

La somme d'un nombre et de son opposé est égale à 0.

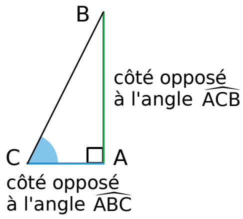
Opposés par le sommet (angles)

Deux angles opposés par le sommet sont deux angles qui ont un sommet commun et dont les côtés sont dans le prolongement l'un de l'autre.



Opposé (côté)

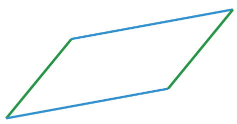
Dans un triangle rectangle, le côté opposé à un angle aigu est le côté qui n'est pas un côté de cet angle.



P

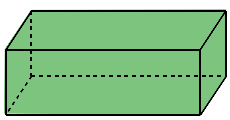
Parallélogramme

Un parallélogramme est un quadrilatère qui a ses côtés opposés parallèles deux à deux.



Parallélépipède rectangle

Un parallélépipède rectangle est un solide dont les faces sont toutes des rectangles.



Patron

Le patron d'un solide est une disposition à plat des faces du solide. Une fois découpé et plié, il permet de construire le solide.

Pavé droit

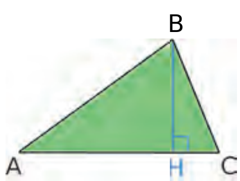
Un pavé droit est un parallélépipède rectangle.

Périmètre

Le périmètre d'une figure plane est la longueur du contour de cette figure.

Pied (de la hauteur)

Dans un triangle, on appelle pied de la hauteur relative à un côté, le point d'intersection de cette hauteur avec ce côté.



Polygone

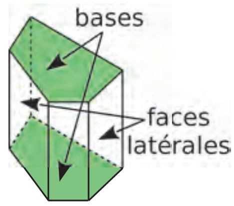
Un polygone est une figure fermée à plusieurs côtés.

Premier (nombre)

Un nombre premier est un nombre entier qui n'a que deux diviseurs distincts (1 et lui-même).

Prisme droit

Un prisme droit est un solide ayant deux faces polygonales parallèles et superposables (les bases), et des faces rectangulaires (les faces latérales).



Produit

Un produit est le résultat d'une multiplication.

Programme

Un programme est un langage compris et interprété par l'ordinateur, permettant l'exécution d'un algorithme donné.

Q

Quadrilatère

Un quadrilatère est un polygone qui a quatre côtés.

Quotient (dans une division)

Dans une division euclidienne, le quotient est le résultat de l'opération.

Quotient

Le quotient d'un nombre a par un nombre b non nul est le nombre qu'il faut multiplier par b pour obtenir a. On le note : $a \div b$ ou $\frac{a}{b}$.

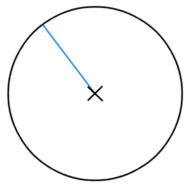
LEXIQUE · L'essentiel des notions

R

Rayon

Un rayon d'un cercle est un segment qui joint le centre et un point du cercle.

Le rayon d'un cercle est la distance entre le centre et un point du cercle.



Rectangle

Un rectangle est un quadrilatère qui a quatre angles droits.

Rectangle (triangle)

Un triangle rectangle est un triangle qui possède un angle droit.

Repère

Un repère est un système d'axes permettant de repérer des points. Les axes du repère se coupent en un point appelé l'origine du repère.

S

Scientifique (écriture ou notation)

L'écriture scientifique d'un nombre décimal est de la forme $a \times 10^n$ où la distance à zéro de a est un nombre décimal compris entre 1 et 10 (10 exclu) et n un nombre entier relatif.

Section

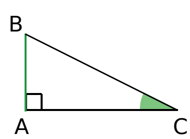
Une section est la figure géométrique obtenue lorsqu'on coupe un solide par un plan.

Semblables (triangles)

Deux triangles sont semblables si les longueurs de leurs côtés sont proportionnelles.

Sinus

Dans un triangle rectangle, le sinus d'un angle aigu est le quotient de la longueur du côté opposé à cet angle par la longueur de l'hypoténuse.



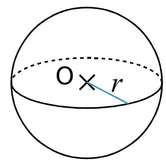
$$\text{sinus } \widehat{ACB} = \frac{\text{côté opposé à l'angle } \widehat{ACB}}{\text{hypoténuse}} = \frac{BA}{BC}$$

Somme

Une somme est le résultat d'une addition.

Sphère

La sphère de centre O et de rayon r est formée de tous les points de l'espace situés à r cm du point O.



Supérieur

On dit que a est supérieur à b (on note $a > b$) lorsque a est plus grand que b.

Supplémentaires (angles)

Deux angles sont supplémentaires si la somme de leurs mesures est égale à 180°.

T

Tangente

Dans un triangle rectangle, la tangente d'un angle aigu est le quotient de la longueur du côté opposé à cet angle par la longueur du côté adjacent à cet angle.

$$\text{tangente } \widehat{ACB} = \frac{\text{côté opposé à l'angle } \widehat{ACB}}{\text{côté adjacent à l'angle } \widehat{ACB}}$$

Terme

Dans une addition ou une soustraction, les termes sont les nombres ajoutés ou retranchés.
Dans l'addition $4 + 5$, les termes sont 4 et 5.
Dans la soustraction $12 - 7$, les termes sont 12 et 7.

Trapèze

Un trapèze est un quadrilatère qui a deux côtés opposés parallèles.

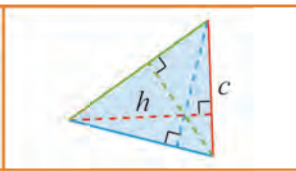
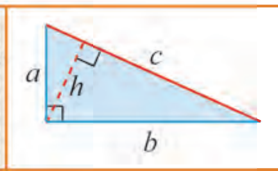
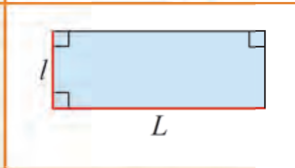
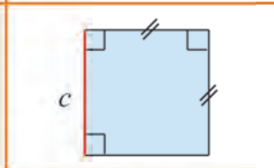
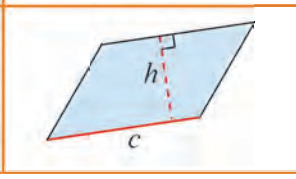
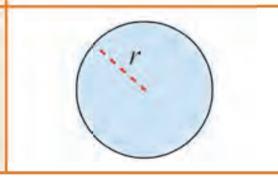
V

Volume d'un solide

Le volume d'un solide est la mesure de l'espace occupé par ce solide, dans une unité donnée.

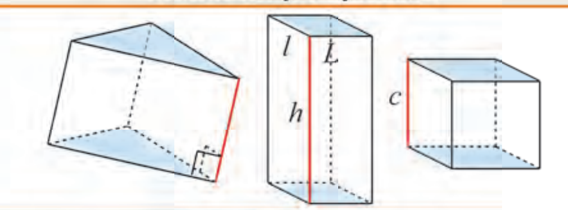
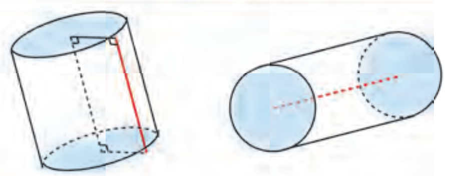
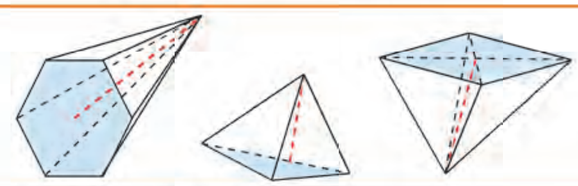
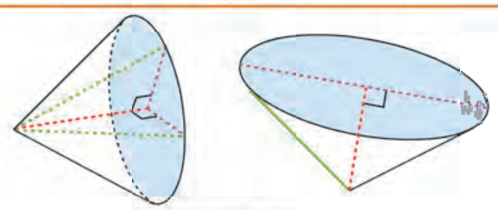
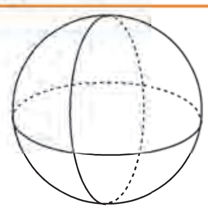
Périmètres $\mathscr{P}$ et aires $\mathscr{A}$

Exemples de conversion : 25,4 cm^2 = 2 540 mm^2 ; 50π m^2 = 0,005π hm^2 (ou ha) ≈ 0,016 ha.

Triangle		$\mathscr{A} = \dfrac{c \times h}{2}$	**Triangle rectangle**		$\mathscr{A} = \dfrac{a \times b}{2} = \dfrac{c \times h}{2}$
Rectangle		$\mathscr{A} = L \times l$ $\mathscr{P} = 2L + 2l$ ou $\mathscr{P} = 2(L + l)$	**Carré**		$\mathscr{A} = c \times c = c^2$ $\mathscr{P} = 4 \times c = 4c$
Parallélo-gramme		$\mathscr{A} = c \times h$	**Disque**		$\mathscr{A} = \pi \times r \times r = \pi r^2$ $\mathscr{P} = 2 \times \pi \times r = 2\pi r$ ou $\mathscr{P} = \pi \times$ diamètre

Volumes $\mathscr{V}$ et aires latérales $\mathscr{A}_L$

Exemples de conversion : 1 dm^3 = 1 L ; 1 L = 1 000 mL ; 2 534 cm^3 = 2,534 dm^3 ou L.

	Solide en perspective	Formules
Prisme droit		$\mathscr{V}$ = Aire base $\times h$ $\mathscr{V}_{\text{cube}} = c \times c \times c = c^3$ $\mathscr{V}_{\text{pavé droit}} = L \times l \times h$ $\mathscr{A}_L$ = Périmètre base $\times h$
Cylindre de révolution		$\mathscr{V}$ = Aire base $\times h$ $\mathscr{V} = \pi r^2 \times h$ $\mathscr{A}_L$ = Périmètre base $\times h$ $\mathscr{A}_L = 2\pi r \times h$
Pyramide		$\mathscr{V} = \dfrac{\text{Aire base} \times h}{3}$
Cône de révolution		$\mathscr{V} = \dfrac{\text{Aire base} \times h}{3}$ $\mathscr{V} = \dfrac{\pi r^2 \times h}{3}$
Boule		$\mathscr{V} = \dfrac{4}{3}\pi r^3$ $\mathscr{A} = 4\pi r^2$

Crédits iconographiques : pp.4-10-24-28-39-40-42-46-53-54-63-65-68-69-84-103-109-117-118-128-133-140-143 à 146-151-160-161-164-170-172-175-178-185-207 : pixabay.com / pp.25-135-159 : Texas Instruments Incorporated / pp. 52-153 : publicdomainvectors / pp. 54-64-122 : ©julientromeur/fotolia.com / pp. 72 - 78 - 80 - 87 - 93 - 95 - 142 - 148 - 165 : openclipart / pp. 106-144-150-166-180 : Wikimedia Commons / p.128 : publicdomainpictures

Imprimé en Italie par ROTOLITO LOMBARDA
Dépôt légal : avril 2016 - ISBN : 978-2-36246-148-4
Génération 5 - 82 rue du Bon Pasteur, 73000 Chambéry
www.generation5.fr